Angewandte Stochastik II
WS 2013/14

Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dr. Jürgen Kampf

2. Übungsblatt
Abgabe: 4. November, 16:15

Aufgabe 1: Maßzahlen
(1+1=2 Punkte)
Gegeben sei die Stichprobe $(1, 4, 1, 5, 6)$.

a) Berechnen Sie die getrimmten arithmetischen Mittel $x_5^{(1)}$ und $x_5^{(2)}$ sowie das harmonische Mittel.

b) Bestimmen Sie die Quantile der Ordnung $\alpha = 0,4$ und $\alpha = 0,45$.

Aufgabe 2: Exponentialverteilte Zufallsvariablen in R
(1+1+3=5 Punkte)

Abgabe von R-Aufgaben:
Sie können den R-Code handschriftlich abgeben.
Alternativ können Sie auch einen Ausdruck abgeben. Dann muss aber das ausgedruckte Dokument Ihren Namen enthalten.

Arbeiten Sie im R-Skript die Abschnitte 4, 5 und 6 mit Ausnahme der Unterabschnitte 6.3.1, 6.5 und 6.6 durch.
Simulieren Sie 200 Realisierungen von Exp(2)-verteilten Zufallsvariablen.

a) Erstellen Sie ein Histogramm der relativen Häufigkeiten der simulierten Daten und plotten Sie in dieses Histogramm die Dichte der Exp(2)-Verteilung.

b) Plotten Sie die empirische Verteilungsfunktion der simulierten Daten mit der in R enthaltenen Funktion `ecdf`. Plotten Sie die theoretische Verteilungsfunktion in das selbe Schaubild.

c) Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion, ohne den Befehl `ecdf` zu verwenden.
Eine mögliche Vorgehensweise: Wenn `v` der Vektor mit den Stichprobenwerten ist, können Sie mit `v[v<x]` den Teilvektor erzeugen, der die Werte enthält, die kleiner sind als x (analog kleiner gleich) sind. Die Länge eines Vektors erhalten Sie mit `length()`. Sortieren kann man ihn mit `sort()`. Mit `lines(c(x1, x2), c(y1, y2))` können Sie eine Linie zwischen (x1, y1) und (x2, y2) erzeugen.
Alternative: (Hierfür müssen Sie zusätzlich die Abschnitte 3.2 und 6.3.1 durcharbeiten.) Definieren Sie mittels `function()` eine Funktion (nämlich die Verteilungsfunktion) und plotten Sie diese. Achtung: Die Funktion muss vektorwertig sein.

Aufgabe 3: Niederschlagsdaten in R
(0,5 + 1 + 0,5 + 1 + 1 = 4 Punkte)
Machen Sie mittels `data(precip)` einen Datensatz von Niederschlagsmengen verfügbar. Dieser ist nun in der Variable *precip* gespeichert.

a) Bestimmen Sie mittels `quantile` das untere Quartil.

b) Durch geschickte Kombination der bisher eingeführten Befehle können Sie sich das 10.-kleinste Element des Datensatzes ausgeben lassen (ohne Verwendung von `quantile`). Wie?

c) Welchen Wert erhalten Sie, wenn Sie Teil b) nutzen, um das untere Quartil zu berechnen?

d) Ist die Verteilung der Niederschlagsmengen symmetrisch? Ist sie unimodal? (Begründung!)

e) Erzeugen Sie mittels `boxplot(precip)` einen Boxplot der Niederschlagsmengen. Kommt Ihnen (wie schon das untere Quartil) auch dieser seltsam vor?

Aufgabe 4: Ungleichungen zwischen Mittelwerten (2+1+3=6 Punkte)

Gegeben sei eine Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$ von positiven Zahlen.

a) Es ist bekannt, dass die Logarithmus-Funktion konkav ist, d.h.

$$\log(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \log(x) + (1-\lambda)\log(y), \qquad \forall x, y > 0,\ \lambda \in [0,1].$$

Folgern Sie hieraus durch vollständige Induktion, dass

$$\log(\tfrac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)) \geq \tfrac{1}{n}(\log(x_1) + \cdots + \log(x_n)).$$

b) Beweisen Sie an Hand von Teil a) die Ungleichung

$$x_n^g \leq \bar{x}_n.$$

c) Beweisen Sie die Ungleichung

$$x_n^h \leq x_n^g.$$