Angewandte Stochastik II
WS 2013/14

Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dr. Jürgen Kampf

4. Übungsblatt
Abgabe: 2. Dezember, 16:15

Aufgabe 1: Regressions-Analyse
(1,5+0,5+0,5+0,5+1=4 Punkte)

Wir betrachten erneut den Datensatz **widerstand.txt** von Blatt 3.
Lösen Sie diese Aufgabe ohne Verwendung des Befehls `lm()`. Die Befehle `cov()`, `var()` und `mean()` dürfen verwendet werden.

a) Schätzen Sie die Regressionskonstante, den Regressionskoeffizienten und die Regressionsvarianz, wenn der Radius die Einflussgröße und der Widerstand die Zielgröße ist.

b) Zeichnen Sie ein Streudiagramm von Widerstand gegen Radius und zeichnen Sie die Regressionsgerade in dieses Diagramm.

c) Welchen Widerstand erwarten Sie auf Grund der Ergebnisse von Teil a) von einem Draht des Radius $0.01\,mm$?

d) Berechnen Sie das Bestimmtheitsmaß R^2.

e) Entscheiden Sie an Hand eines Residualplots, ob es eine gute Idee war, ein lineares Modell an die Daten anzupassen.

Aufgabe 2: Transformierte Daten
(1+1+1+1=4 Punkte)

Wir betrachten weiterhin den Datensatz **widerstand.txt**.
Lösen Sie auch diese Aufgabe ohne Verwendung des Befehls `lm()`. Die Befehle `cov()`, `var()` und `mean()` dürfen verwendet werden.

a) Schätzen Sie die Regressionskonstante und den Regressionskoeffizienten, wenn der Logarithmus des Radius die Einflussgröße und der Logarithmus des Widerstands die Zielgröße ist.

b) Zeichnen Sie ein Streudiagramm von Widerstand gegen Radius (nicht von den Logarithmen) und zeichnen Sie diejenige Kurve ein, um die sich laut den Ergebnissen von Teil a) die Punkte konzentrieren.

c) Welchen Widerstand erwarten Sie auf Grund der Ergebnisse von Teil a) von einem Draht des Radius $0.01\,mm$?

d) Zeichnen und kommentieren Sie den Residualplot.

Aufgabe 3: Die Gamma-Verteilung
(2+3+3=8 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\lambda^p x^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

für $\lambda > 0$ und $p > 0$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktionen der $\Gamma(\lambda, 2)-$ und $\Gamma(\lambda, 3)$-Verteilung.

c) Sei $X_n \sim \Gamma(\lambda, pn)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und feste $\lambda, p > 0$. Zeigen Sie: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\lambda X_n - pn}{\sqrt{pn}} \leq x\right) = \Phi(x),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion von N(0,1) ist.