Angewandte Stochastik II
WS 2013/14

Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dr. Jürgen Kampf

5. Übungsblatt
Abgabe: 16. Dezember, 16:15

Aufgabe 1: Die t-Verteilung
(1+3=4 Punkte)

Sei $X \sim t_r$. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{E}\,X = 0,$ falls $r \geq 2$.

b) $\operatorname{Var} X = \frac{r}{r-2},$ falls $r \geq 3$.

Hinweis: Benutzen Sie die Definition der t-Verteilung, nicht deren Dichte.

Aufgabe 2: Ein Schätzer für die Exponentialverteilung
(2+1+1+2=6 Punkte)

Es sei eine Zufallsstichprobe von unabhängigen und identisch $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gegeben, wobei der Parameter $\lambda > 0$ unbekannt ist.

a) Zeigen Sie: $\min_{i=1,\ldots,n} X_i \sim \mathrm{Exp}(n\lambda)$.

b) Zeigen Sie, dass $n \cdot \min_{i=1,\ldots,n} X_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für λ^{-1} ist.

c) Berechnen Sie die mittlere quadratische Abweichung des Schätzers aus Teil b) für λ^{-1}.

d) Zeigen Sie, dass der Schätzer aus Teil b) weder stark noch schwach konsistent für λ^{-1} ist.

Aufgabe 3: Schätzer für die Gleichverteilung
(3,5+1,5+1=6 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen, wobei $X_i \sim U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ mit Parameter $\theta \in \mathbb{R}$. Es seien zwei Schätzer $\widehat{\theta}_1$ und $\widehat{\theta}_2$ für θ gegeben durch

$$\widehat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X}_n \qquad \text{und} \qquad \widehat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n) = \min\{X_1, \ldots, X_n\} + \tfrac{1}{2}.$$

a) Berechnen Sie den Bias von $\widehat{\theta}_2$ und die Varianz der beiden Schätzer.

b) Berechnen Sie den mittleren quadratischen Fehler der beiden Schätzer. Für welche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ hat welcher Schätzer den kleineren mittleren quadratischen Fehler?

c) Zeigen Sie: $\widehat{\theta}_2$ ist stark und schwach konsistent.

Aufgabe 4: Starke Konsistenz der Stichprobenvarianz
(2 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\,X_1^2 < \infty$. Zeigen Sie: Die Stichprobenvarianz S_n^2 ist stark konsistent für $\operatorname{Var} X_1$.

Neuer Klausurtermin

Die erste Klausur wurde auf Donnerstag, den 27. Februar 2014, verlegt.