Angewandte Stochastik II
WS 2013/14

Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dr. Jürgen Kampf

7. Übungsblatt
Abgabe: 27. Januar, 16:15

Aufgabe 1: Maximum-Likelihood-Schätzer für diskrete Verteilungen (2+2=4 Punkte)
Seien $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. Zufallsvariablen. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{p}$ für p in folgenden Situationen:

a) $X_i \sim Geo(p)$.

b) $X_i \sim Bin(m, p)$, wobei m bekannt ist.

Aufgabe 2: Schätzer für Bauernhöfe (2+3+1=6 Punkte)
Ein Supermarkt wird von vier Bauernhöfen 1, 2, 3 und 4 mit Eiern beliefert, die alle sowohl braune als auch weiße Eier produzieren. Diese werden rein zufällig auf die Kartons verteilt. Der Supermarkt bekommt von den vier Höfen $q_1 = 40\%$, $q_2 = 10\%$, $q_3 = 25\%$ und $q_4 = 25\%$ seiner Eier. Der Anteil von weißen Eiern beträgt bei den verschiedenen Höfen jeweils $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.35$, $p_3 = 0.5$ bzw. $p_4 = 0.8$. In einem Eierkarton befinden sich 4 weiße und 6 braune Eier.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe eines ML-Schätzers, von welchem Hof der Eierkarton vermutlich stammt.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Bayes-Schätzers mit Verlustfunktion $V(\theta, \theta') = \mathbf{1}_{\{\theta \neq \theta'\}}$ für $\theta, \theta' \in \{1, 2, 3, 4\}$, von welchem Hof der Eierkarton vermutlich stammt.

c) Wäre es sinnvoller gewesen, in Teil b) statt V die Verlustfunktion $V_1(\theta, \theta') = (\theta - \theta')^2$ für $\theta, \theta' \in \{1, 2, 3, 4\}$ zu verwenden?

Aufgabe 3: Bayes-Schätzer für die Normalverteilung (3+1+1=5 Punkte)

a) Seien $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ unabhängig mit bekannter Standardabweichung σ. Der Erwartungswert μ soll mit dem Bayes-Ansatz geschätzt werden. Zeigen Sie: Wenn die a-priori-Verteilung von μ die $\mathcal{N}(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$-Verteilung ist und eine Realisierung $x_1, \dots, x_n$ beobachtet wird, dann ist die a-posteriori-Verteilung
$$\mathcal{N}\Big(\frac{\tilde{\sigma}^2 \sum_{i=1}^n x_i + \sigma^2 \tilde{\mu}}{n\tilde{\sigma}^2 + \sigma^2}, \frac{\tilde{\sigma}^2 \sigma^2}{n\tilde{\sigma}^2 + \sigma^2}\Big).$$
Hinweis: Kann man, wenn die Dichten zweier Verteilungen bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmen, bereits schließen, dass die Verteilungen gleich sind?

b) Bei 74 Kindern im Vorschulalter wird ein Test zur Erfassung der nicht-verbalen Intelligenz durchgeführt, bei dem 0 bis 32 Punkte erreicht werden können. Im Mittel werden 16.081 Punkte erreicht. Die Zufallsvariable X_i ist das Testergebnis der i-ten Versuchsperson. Nehmen Sie an, dass $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ u.i.v., wobei $\sigma = 4$ ist und $\mu \in \mathbb{R}$ durch den Bayes-Ansatz geschätzt werden soll. Benutzen Sie die Normalverteilung mit Erwartungswert 15 und Standardabweichung $4/3$ als a-priori-Verteilung von μ und $V(\mu, \mu') = (\mu - \mu')^2$ als Verlustfunktion.

c) Welches Problem tritt auf, wenn man in Teil b) die Verlustfunktion $V'(\mu, \mu') = \mathbf{1}_{\{\mu \neq \mu'\}}$ verwenden möchte?