

**8. Übungsblatt**  
**Besprechung: 10. Februar, 16:15**

**Aufgabe 1: Cramer-Rao-Schranke der Poisson-Verteilung**  
**(0,5+1+1,5=3 Punkte)**

Seien  $X_1, \dots, X_n \sim Poi(\lambda)$  unabhängig.

- a) Welche Varianz hat der Schätzer  $\bar{X}_n$ ?  
b) Zeigen Sie, dass für die Zähldichte  $f_\lambda$  der  $Poi(\lambda)$ -Verteilung gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} f_\lambda(k) = \frac{d}{d\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} f_\lambda(k) = 0.$$

- c) Welche Varianz hat ein erwartungstreuer Schätzer für  $\lambda$ , der die Voraussetzungen der Cramer-Rao-Ungleichung erfüllt, mindestens?

**Aufgabe 2: Konfidenzintervalle für die Milchproduktion**  
**(1+1+1=3 Punkte)**

Die jährliche Milchleistung von Kühen eines Bauernhofes kann als normalverteilt angesehen werden. Gemessen wurden folgende Milchleistungen von 5 Kühen in Litern:

35.1, 36.7, 33.0, 34.5, 35.6

- a) Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau  $1 - \alpha = 0.95$ , wenn bekannt ist, dass die Standardabweichung  $\sigma = 1.5$  Liter beträgt.  
b) Wieviele Messungen müssen mindestens durchgeführt werden, damit man mit 95%-iger Sicherheit darauf vertrauen kann, dass der Fehler bei der Schätzung des Mittelwerts höchstens 0.5 Liter ist?  
c) Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau  $1 - \alpha = 0.95$ , wenn die Standardabweichung unbekannt ist.

**Aufgabe 3: Konfidenzintervalle für die Gleichverteilung**  
**(2+3+2=7 Punkte)**

Seien  $X_1, \dots, X_n \sim U(0, \theta)$ ,  $\theta > 0$ , u.i.v. Zufallsvariablen.

- a) Bestimmen Sie ein minimales Konfidenzintervall, das auf dem Punktschätzer  $\hat{\theta} := \max\{X_1, \dots, X_n\}$  basiert, für den Parameter  $\theta$  zum Niveau  $1 - \alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ .  
b) Bestimmen Sie ein asymptotisches Konfidenzintervall für den Parameter  $\theta$  zum Niveau  $1 - \alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Verwenden Sie hierfür, dass  $\bar{X}_n$  asymptotisch normalverteilt ist.  
c) Sei  $n = 10$ . Bestimmen Sie durch Simulation ein minimales Konfidenzintervall, das auf dem Punktschätzer  $\hat{\theta} := 2\bar{X}_{10}$  basiert, für den Parameter  $\theta$  zum Niveau 0.95.