Angewandte Stochastik II
WS 2013/14

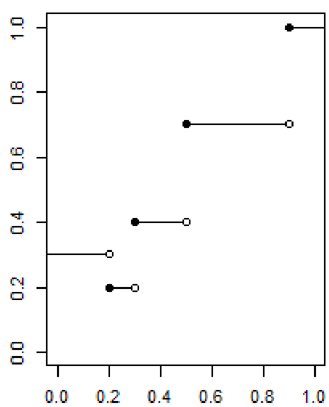
Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Dr. Jürgen Kampf

Klausurvorbereitung
27. Februar, 10:00

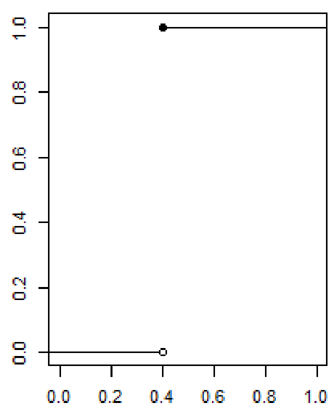
Hilfsmittel: Ein nicht programmierbarer Taschenrechner;
ein einseitig handschriftlich beschriebenes DIN A4-Blatt.

Aufgabe 1: Empirische Verteilungsfunktion
(3+3+3=9 Punkte)

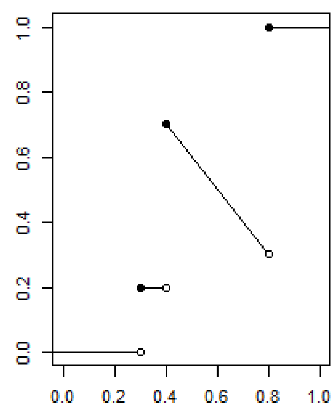
a) Welche der folgenden Grafiken können eine empirische Verteilungsfunktionen darstellen? Begründen Sie Ihre Aussage.



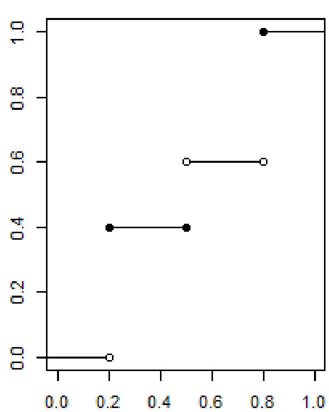
(i)



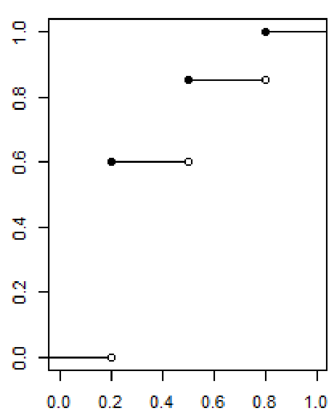
(ii)



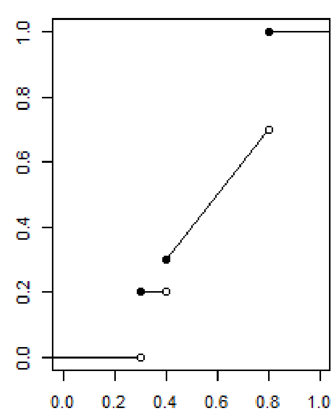
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

b) Sei $(X_1, \ldots, X_{10})$ eine u.i.v. Zufallsstichprobe mit $X_i \sim U(0,a)$ und empirischer Verteilungsfunktion $\hat{F}_{10}(x)$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\hat{F}_{10}(\frac{a}{2}) = \frac{1}{2})$.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}\hat{F}_n(x)$ und die Varianz $\operatorname{Var} \hat{F}_n(x)$.
(Die Momente der Binomialverteilung können als bekannt vorausgesetzt werden).

Aufgabe 2: Statistik mit R
(2+2+2=6 Punkte)
Nehmen Sie an, Sie haben in R einen Vektor b, der eine Stichprobe $(b_1, \ldots, b_n)$ repräsentiert. Schreiben Sie R-Code, der folgende Aufgaben löst:

a) Berechnen Sie das geometrische und das harmonische Mittel von b.

b) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ Realisierungen von u.i.v. $\Gamma(\lambda, 8)$-verteilten Zufallsvariablen sind, kann λ durch $\hat{\lambda} = 8/\bar{b}_n$ geschätzt werden. Allerdings ist dieser Schätzer verzerrt. Berechnen Sie den Jackknife-Schätzer für die Verzerrung von $\hat{\lambda}$ basierend auf der Stichprobe b.

c) Erzeugen Sie einen Q-Q-Plot, um zu entscheiden, ob die Stichprobenelemente einer $\Gamma(5, 8)$-Verteilung entstammen.
Hinweis: $\Gamma(\lambda, p)$*-verteilte Zufallsvariablen können Sie mittels* `rgamma(`*Anzahl*`, rate=`λ`, shape=`p`)` *erzeugen. Entsprechend funktionieren* `dgamma`*,* `pgamma` *und* `qgamma`*.*

Aufgabe 3: Eigenschaften von Kerndichteschätzern
(4+3=7 Punkte)
Seien $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. absolut stetige Zufallsvariablen. Die Dichte f der Verteilung von X_1 soll mit einem Rechteckskern

$$K(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$$

und Bandweite $h = 1/3$ geschätzt werden. Wir betrachten den Wert $\hat{f}(1)$ des Kerndichteschätzers an der Stelle 1.

a) Berechnen Sie die Verzerrung von $\hat{f}(1)$ als Gleitkommazahl, wenn $X_1 \sim Exp(1)$.

b) Zeigen Sie, dass $\hat{f}(1)$ stark konsistent ist, wenn $X_1 \sim U(0, 3)$.

Aufgabe 4: Momentenschätzer
(1+3=4 Punkte)
Seien $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. Zufallsvariablen.

a) Bestimmen Sie den Momentenschätzer für p, wenn $X_1 \sim \Gamma(\lambda_0, p)$ mit bekannten λ_0 ist.

b) Bestimmen Sie den Momentenschätzer für α, wenn X_1 die Dichte $f(x) = (\alpha+1)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)x^\alpha$ mit $\alpha > 0$ hat.

Aufgabe 5: Maximum-Likelihood- und Momentenschätzer für die Gleichverteilung
(6 Punkte)
Seien $X_1, \ldots, X_n \sim U(a, b)$ unabhängige Zufallsvariablen. Bestimmen Sie den Momentenschätzer (3 Punkte) und den Maximum-Likelihood-Schätzer (3 Punkte) für (a, b).

Aufgabe 6: Maximum-Likelihood-Schätzer für die Normalverteilung
(4 Punkte)
Seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ unabhängige Zufallsvariablen. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für (μ, σ^2). *Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer tatsächlich existiert.*

Aufgabe 7: Konfidenzintervalle
(1+3+3=7 Punkte)
Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Zufallsstichprobe mit $X_i \sim \text{Exp}(\theta)$, $\theta > 0$. Sei $\alpha \in (0,1)$ und sei $\gamma = 1 - \alpha$.

a) Zeigen Sie: $\theta X_i \sim \text{Exp}(1)$.

b) Bestimmen Sie ein minimales Konfidenzintervall für den Erwartungswert $\mathbb{E}X_i$ zum Niveau γ, das auf $\sum_{i=1}^n X_i$ basiert.

c) Bestimmen Sie ein asymptotisches Konfidenzintervall für $\mathbb{E}X_i$ zum Niveau γ. Verwenden Sie hierfür, dass $\bar{X}_n$ asymptotisch normalverteilt ist.

Kontrollwerte
Hier sind einige Werte, damit Sie die Korrektheit ihrer Rechnungen überprüfen können.

Aufgabe 1
a) (ii) und (v) können empirische Verteilungsfunktionen sein.
b) $63/256 = 0,246$.
c) $\mathbb{E}\hat{F}_n(x) = \frac{x}{a}$ und $\text{Var}\,\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\frac{x}{a}(1 - \frac{x}{a})$

Aufgabe 3
a) 0,0069 (unabhängig von n)

Aufgabe 4
a) $\hat{p} = \lambda_0 \bar{X}_n$
b) $\hat{\alpha} = 1/(1 - \bar{X}_n) - 2$

Aufgabe 5
Momentenschätzer:

$$\hat{a} = \bar{X}_n - \sqrt{3\bar{X_n^2}} \quad \text{und} \quad \hat{b} = \bar{X}_n + \sqrt{3\bar{X_n^2}}, \quad \text{wobei} \quad \bar{X_n^2} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$$

Maximum-Likelihood-Schätzer:

$$\hat{a} = \min\{X_1, \ldots, X_n\} \quad \text{und} \quad \hat{b} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

Aufgabe 6

$$\hat{\mu} = \bar{X}_n \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Aufgabe 7
b)

$$\Big[\frac{\Gamma(\lambda, n)_{\alpha/2}}{\sum_{i=1}^n X_i}, \frac{\Gamma(\lambda, n)_{1-\alpha/2}}{\sum_{i=1}^n X_i}\Big],$$

wobei $\Gamma(\lambda, p)_q$ das q-Quantil der $\Gamma(\lambda, p)$-Verteilung bezeichnet.
c)

$$\Big[\frac{z_{\alpha/2} + 1}{\sqrt{n}\bar{X}_n}, \frac{z_{1-\alpha/2} + 1}{\sqrt{n}\bar{X}_n}\Big],$$

wobei z_q das q-Quantil der $N(0,1)$-Verteilung bezeichnet.