H. Lanzinger
M. Thalmaier

Sommersemester 2005
19.07.2005

Klausur zu
Stochastik für Informatiker und Wirtschaftswissenschaftler

Zeit: 120 Minuten
Hilfsmittel: ein beliebig beschriebenes DIN-A-4-Blatt (allerdings nicht mit Aufgaben oder Lösungen zu Aufgaben) und nicht programmierbarer Taschenrechner
Zu erreichende Punkte: 50

1. Entscheiden Sie (ohne Begründung), welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind. Kreuzen Sie die Antworten auf dem vorgefertigten Blatt an.
   Jede richtige Antwort gibt +1 Punkt, jede falsche Antwort gibt −1 Punkt.

   a) Es gibt keine Verteilungsfunktion mit $\lim_{x\to\infty} F(x) = 2$.
   b) Für jede Zufallsvariable X gilt $P(X < a) = P(X \leq a)$.
   c) Es gibt Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, für die $\prod_{i=1}^{n} E(X_i) = E(\prod_{i=1}^{n} X_i)$ nicht richtig ist.
   d) $Cov(X, Y) = (-1)Cov(Y, X)$
   e) Die Momentenmethode und die Maximum-Likelihood-Methode liefern immer die gleiche Schätzfunktion für einen Parameter. (je 1)

2. Nach dem Picknick vermisst eine Familie ihren Hund. Dafür gibt es drei Möglichkeiten:

   A: Er ist heimgelaufen und wartet auf die Familie vor dem Haus.
   B: Er bearbeitet einen großen Knochen auf dem Picknickplatz.
   C: Er streunt im Wald.

   Aufgrund der Gewohnheiten gilt: $P(A) = 0.25$ und $P(B) = 0.5$ und $P(C) = 0.25$.
   Je ein Kind wird zurück an den Picknick-Platz und an den Waldrand geschickt. Wenn der Hund am Picknick-Platz ist, findet man ihn mit 90%−iger Wahrscheinlichkeit, streunt er im Wald, findet man ihn mit 50%−iger Wahrscheinlichkeit.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eines der beiden Kinder den Hund finden?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, ihn bei der Rückkehr vor der Haustür anzutreffen, falls die Kinder den Hund nicht finden? (3+2)

3. Eine Ölgesellschaft weiß aus Erfahrung, dass die Wahrscheinlichkeit für eine erfolgreiche Probebohrung 0.01 beträgt. Berechnen Sie die

   a) exakte
   b) approximative

   Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den nächsten 300 Probebohrungen höchstens zwei erfolgreich sein werden.
   Hinweis: Verwenden Sie in Teil b) das Gesetz der seltenen Ereignisse. (3+2)

4. Gegeben sei eine absolutstetige Zufallsvariable X und eine Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

   a) Zeigen Sie, dass $f(x)$ eine Dichte ist.

   b) Sei $f(x)$ die Dichte der Zufallsvariable X. Berechnen Sie E(X). (3+4)

5. Die Korngröße von Kies wird durch eine Zufallsvariable X beschrieben.
X sei normalverteilt mit den Parametern $\mu = 8$ mm und $\sigma = 1,14$ mm.

   a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Korngröße höchstens 10 mm beträgt.

   b) Geben Sie eine Schranke b an, so dass nur 5% aller Körner eine Größe haben, die oberhalb von b liegt. (3+3)

6. Die Produktion eines Arzneimittels ist nur mit Hilfe von Mäusemilch möglich. In einem Labor werden die dafür benötigten Mäuse gezüchtet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine weibliche Maus geboren wird, ist gleich 0.47.
In einem bestimmten Zeitraum werden 800 Mäuse geboren.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter mehr als 350 weibliche Mäuse?

   b) Wieviele Mäuse müssten in diesem Zeitraum mindestens geboren werden, damit die Wahrscheinlichkeit für die Geburt von mehr als 400 weiblichen Mäusen mindestens gleich 0.95 ist? (3+5)

7. Die normalverteilte Zufallsgröße X bezeichne die Fahrzeit zwischen Ulm und Berlin mit dem Auto. Aus einer Stichprobe $x_1, ..., x_{16}$ wurde errechnet, dass die mittlere Fahrdauer sechs Stunden und die empirische Streuung 5.29 Stunden beträgt.
Schätzen Sie ein 0.95-Konfidenzintervall

   a) für μ unter der Voraussetzung $\sigma^2 = 5.29^2$,

   b) für μ, falls σ nicht bekannt ist. (5)

8. Im Rahmen eines Chemie-Praktikums wurde der Farbstoffgehalt der in der Mensa angebotenen Fruchtkaltschale mit der Geschmacksrichtung Maracuja untersucht.
Dabei ergaben sich folgende Werte (in %):

$$0.74 \quad 0.73 \quad 0.75 \quad 0.72 \quad 0.75 \quad 0.76 \quad 0.74 \quad 0.73$$

Gehen Sie davon aus, dass der Farbstoffgehalt normalverteilt ist mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2.
Testen Sie die Hypothese $H_0 : \mu = 0.75$ gegen $H_1 : \mu \neq 0.75$ auf dem 5%-Signifikanzniveau. (5)

9. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebige Zufallsvariable mit $E(X^2) < \infty$. Zeigen Sie:

$$\min_{a \,\epsilon\, \mathbb{R}} E\big((X-a)^2\big) = E\big((X-E(X))^2\big) = Var(X).$$

(4)