Dipl.-Math. Stefan Roth 06.02.2014

# Musterlösung Übungsklausur Lanzinger/Thalmaier

**Aufgabe 1**

(a) **richtig** (b) **falsch** (c) **richtig** (d) **falsch** (e) **falsch**

**Aufgabe 4**

(a) $f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbb{1}\{x > 0\}$. Offensichtlich ist $f(x) \geq 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx &= \lambda^2 \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx \\
&= \lambda^2 \left( \underbrace{-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \right) \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \\
&= \Big[ -e^{-\lambda x} \Big]_0^\infty \\
&= 1
\end{aligned}$$

Also ist $f$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \int_0^\infty \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx \\
&= \lambda^2 \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx \\
&= \lambda^2 \left( \underbrace{-\frac{x^2}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty}_{=0} + \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx \right) \\
&= \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{2}{\lambda} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx \\
&= \frac{2}{\lambda}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 5**

$X \sim \mathsf{N}_{\mu,\sigma^2}$, $\mu = 8$, $\sigma = 1.14$

(a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 10) &= \mathbb{P}(\frac{X-8}{1.14} \leq \frac{10-8}{1.14}) \\ &= \mathbb{P}(\underbrace{\frac{X-8}{1.14}}_{\sim\mathsf{N}_{0,1}} \leq 1.75) \\ &= 0.95994\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > b) = \mathbb{P}(\frac{X-8}{1.14} > \frac{b-8}{1.14}) = 1 - \mathbb{P}(\frac{X-8}{1.14} &\leq \frac{b-8}{1.14}) \overset{!}{=} 0.05 \\ \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(\frac{X-8}{1.14} \leq \frac{b-8}{1.14}) &= 0.95 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{b-8}{1.14} &= 1.65 \\ \Leftrightarrow \quad b &= 9.881\end{aligned}$$

**Aufgabe 6**

\# geborene weibliche Mäuse: $X \sim \mathsf{b}_{n,p}$, $n = 800$, $p = 0.47$

(a) Mit dem zentralen Grenzwertsatz und $Y \sim \mathsf{N}_{0,1}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 350) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 350) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\frac{X - 800 \cdot 0.47}{\sqrt{800 \cdot 0.47 \cdot 0.53}} \leq \frac{350 - 800 \cdot 0.47}{\sqrt{800 \cdot 0.47 \cdot 0.53}}) \\ &\approx 1 - \mathbb{P}(Y \leq -1.84) \\ &= \mathbb{P}(Y \leq 1.84) \\ &= 0.96712\end{aligned}$$

(b) Wie in (a) berechnet man

$$\mathbb{P}(X > 400) \approx 1 - \mathbb{P}(Y \leq \frac{400 - n \cdot 0.47}{\sqrt{n \cdot 0.47 \cdot 0.53}}) \overset{!}{\geq} 0.95$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{400 - n \cdot 0.47}{\sqrt{n \cdot 0.47 \cdot 0.53}} \leq -1.65$$

Mit $z = \sqrt{n}$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{400 - z^2 \cdot 0.47}{z\sqrt{0.47 \cdot 0.53}} &\leq -1.65 \\ \Leftrightarrow \quad -0.47z^2 + 0.82z + 400 &\leq 0\end{aligned}$$

Nullestellen:

$$\begin{aligned}z_{1/2} &= \frac{-0.82 \pm \sqrt{0.82^2 + 1600 \cdot 0.47}}{-2 \cdot 0.47} \\ z_1 &= -28.31 \quad z_2 = 30.06 \\ \Rightarrow n &\geq z_2^2 = 903.6, \text{ d.h. } \ n \geq 904\end{aligned}$$

**Aufgabe 7**

$X \sim \mathsf{N}_{\mu,\sigma^2}$, $\bar{x} = 6$, $s^2 = 5.29$, $s = 2.3$, $\alpha = 0.95$, $c = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$, $n = 16$

(a) $\sigma^2 = 5.29$, $\alpha$-KI für $\mu$:

$$\left[6 - \frac{1.96 \cdot 2.3}{4},\ 6 + \frac{1.96 \cdot 2.3}{4}\right] = [4.873,\ 7.127]$$

(b) $\sigma^2$ unbekannt. $\tilde{c} = t_{15}^{-1}(0.975) = 2.131$. $\alpha$-KI für $\mu$:

$$\left[6 - \frac{2.131 \cdot 2.3}{4},\ 6 + \frac{2.131 \cdot 2.3}{4}\right] = [4.775,\ 7.225]$$

**Aufgabe 8**

$\bar{x} = 0.74$, $s^2 = 0.00017$, $s = 0.013$. Teste

$$H_0 :\ \mu = 0.75 \ \text{ gegen } \ H_1 :\ \mu \neq 0.75$$

$c = t_7^{-1}(0.975) = 2.365$,

$$T = \sqrt{8}\frac{0.74 - 0.75}{0.013} = -2.176$$

$$\Rightarrow \quad |T| = 2.176 < 2.365$$

also wird $H_0$ nicht verworfen.

**Aufgabe 9**

$X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbb{E}X^2 < \infty$, $f(a) := \mathbb{E}(X - a)^2$. Dann gilt

$$f(a) = \mathbb{E}(X - a)^2 = \mathbb{E}X^2 - 2a\mathbb{E}X + a^2$$

$$f'(x) = 2a - 2\mathbb{E}X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \mathbb{E}X$$

Da $f$ eine nach oben geöffnete Parabel beschreibt, ist $f$ bei $a = \mathbb{E}X$ minimal.