Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche

WS 2012/2013
08. 02. 2013

# **Stochastik für Wirtschaftswissenschaftler** - Probeklausur

Besprechung der Lösungen am 13. 02. 2013 in der Vorlesung

- Ergebnisse und Lösungen bitte ausführlich begründen, Lösungswege darstellen (nur für Ergebnisse werden in der Klausur keine Punkte verteilt)
- Bitte alle Ergebnisse auf vier Nachkommastellen runden
- Es wird empfohlen, diese Klausur nur mit den Materialien zu lösen, die auch in der Klausur zugelassen sind

**Aufgabe 1**

In einer Urne befinden sich 26 Kugeln, die mit den Buchstaben des deutschen Alphabets (21 Konsonanten, 5 Vokale) beschriftet sind. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man beim viermaligen Ziehen ohne Zurücklegen

(a) als ersten Buchstaben einen Vokal zieht,

(b) nur Konsonanten zieht,

(c) als ersten Buchstaben das A zieht und die restlichen drei gezogenen Kugeln genau einen Konsonanten und zwei Vokale (egal in welcher Reihenfolge) zeigen.

**Aufgabe 2**

Ein Unternehmen produziert CD-Roms in drei Werken, wobei 40% in Werk 1, 20% in Werk 2 und der Rest in Werk 3 hergestellt werden.
Folgendes sei bekannt:

- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte CD in Werk 1 hergestellt wurde und gleichzeitig defekt ist beträgt 0,008.
- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine in Werk 2 produzierte CD defekt ist, beträgt 0,03.
- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine in Werk 3 produzierte CD defekt ist, beträgt 0,05.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine CD defekt ist, unter der Bedingung, dass sie in Werk 1 produziert wurde?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine aus der Gesamtproduktion zufällig ausgewählte CD defekt?

(c) Eine zufällig ausgewählte CD sei defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese CD in Werk 3 produziert worden?

**Aufgabe 3**

Ein Student schreibt einen Test mit 20 Multiple-Choice-Fragen. Bei jeder Frage gibt es drei Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine korrekt ist. Der Student hat leider keine Ahnung und wählt bei jeder Frage eine Antwort rein zufällig aus.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Student die achte Frage korrekt beantwortet?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Student insgesamt genau zehn Fragen korrekt beantwortet?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Student höchstens eine Frage korrekt beantwortet?

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die sechste Frage die erste derjenigen Fragen ist, die der Student korrekt beantwortet?

**Aufgabe 4**

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ von zwei Zufallsvariablen $X : \Omega \to \{0, 1\}$ und $Y : \Omega \to \{0, 1, 2\}$ sei durch folgende Tabelle gegeben:

| | | | $y$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $P(X = x, Y = y)$ | 0 | 1 | 2 |
| $x$ | 0 | 0,15 | 0,25 | 0,1 |
| | 1 | 0,2 | 0,2 | 0,1 |

(a) Weise nach, dass $p(x, y)$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion ist.

(b) Berechne die Randwahrscheinlichkeitsfunktionen von $X$ und $Y$ und skizziere die Verteilungsfunktion von $X$.

(c) Berechne die Kovarianz von $X$ und $Y$.

(d) Sind $X$ und $Y$ unabhängig?

**Aufgabe 5**

Sei $X$ eine absolut-stetig verteilte Zufallsvariable mit Dichte $f(x) = \frac{2x}{9\lambda^2}\mathbb{1}_{[0,3\lambda]}(x)$ und Parameter $\lambda > 0$.

(a) Sei $\lambda = 1$. Berechne $P(X \leq 2)$.

Sei im Folgenden $\lambda > 0$ unbekannt.

(b) Zeige, dass der Erwartungswert von $X$ durch $2\lambda$ gegeben ist.

(c) Berechne die Varianz von $X$ und den Erwartungswert von $\frac{\lambda^3}{X}e^{2\lambda X}$

(d) Bestimme einen Schätzer für $\lambda$ mit der Momenten-Methode.

(e) Bestimme einen Schätzer für $\lambda$ mit der Maximum-Likelihood-Methode.

**Aufgabe 6**

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, wobei $X_i \sim \mathrm{U}(0, \frac{2}{\theta})$ für alle $i = 1, 2, \ldots$ und ein $\theta > 0$.

(a) Konstruiere ein zweiseitiges asymptotisches Konfidenzintervall für $\theta$ zum Niveau $\gamma$.
Hinweis: setze $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$.

(b) Berechne das in (a) konstruierte asymptotische Konfidenzintervall für eine konkrete Stichprobe mit Stichprobenumfang $n = 24$ und Stichprobenmittel $\bar{x}_{24} = 0,47$ zum Niveau $\gamma = 0,9$.

**Aufgabe 7**

Die jährlichen Renditen einer Aktie seien zufällig. Es wird angenommen, dass die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$, welche die jährlichen Renditen beschreiben, unabhängig und $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt sind. Für 4 Jahre wurden folgende Renditen beobachtet: 0,08; 0,03; 0,05; 0,08.
Teste die Hypothese $H_0$ : *Die durchschnittliche jährliche Rendite beträgt 0,05* zum Niveau $\alpha = 0,01$. Führe einen zweiseitigen Test mit $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ durch.

Wichtige Quantile der Standardnormalverteilung:

| $\gamma$ | 0.75 | 0.8 | 0.9 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_\gamma$ | 0.67 | 0.86 | 1.28 | 1.64 | 1.96 | 2.33 | 2.58 |

Wichtige Quantile der t-Verteilung:

| | | $\gamma$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $t_{n,\gamma}$ | 0,9 | 0,95 | 0,975 | 0,99 | 0,995 |
| | 3 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 |
| | 4 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,747 | 4,604 |
| $n$ | 5 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 |
| | 23 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 |
| | 24 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,592 | 2,797 |