



Stochastik für WiWi - Übungsblatt 11

Abgabe: 24. Januar vor Beginn der Übung.

Hinweise:

- Bitte bis spätestens Freitag, den 24. Januar 2014 zu den Vorleistungen anmelden. Beachte: Es hat prüfungstechnisch keine Konsequenzen, wenn man sich zu den Vorleistungen anmeldet, diese dann aber nicht besteht.
- Dies ist das letzte Übungsblatt, auf dem Punkte für die Vorleistungen erreicht werden können. Zusammen mit den Punkten auf diesem Blatt gab es 276 Punkte und 10 Zusatzpunkte. Um die Vorleistung zu bestehen benötigt man 120 Punkte im SLC.

Aufgabe 1 (3 + 3 Punkte)

Aus Erfahrung sei bekannt, dass die Brenndauer einer Glühbirne einer bestimmten Sorte durch eine absolutstetige Zufallsvariable X mit Dichte

$$f_{\theta}(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2}, \quad x \geq 0$$

beschrieben werden kann, wobei $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter ist.

- (a) Bestimme einen Maximum-Likelihood-Schätzer für θ .
- (b) Die folgende Tabelle zeigt 15 Brenndauern (in 1000 Stunden) der Glühbirnen die in unabhängigen Versuchen ermittelt wurden.

| | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1.530 | 1.173 | 1.832 | 1.075 | 1.539 |
| 0.998 | 2.083 | 0.693 | 2.529 | 1.639 |
| 1.325 | 1.487 | 1.298 | 1.743 | 1.432 |

Welches Ergebnis liefert der Maximum-Likelihood-Schätzer für θ aus Teil (a) für diese Daten?

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 Punkte)

Eine in einer Brauerei zur Flaschenabfüllung eingesetzte Maschine ist auf den Normwert 0.33 Liter eingestellt. Bei der Messung der Biermengen in 10 abgefüllten Flaschen ergaben sich die folgenden Werte (in Liter):

| | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.329 | 0.331 | 0.324 | 0.328 | 0.327 |
| 0.339 | 0.334 | 0.336 | 0.332 | 0.326 |

Nimm nun an, dass die Messwerte Realisierungen einer Zufallsstichprobe X_1, \dots, X_{10} von unabhängigen, identisch N_{μ, σ^2} -verteilten Zufallsvariablen sind. Bestimme ein Konfidenzintervall für

- (a) μ , falls $\sigma^2 = 0.06$ ist

- (b) μ , falls σ^2 unbekannt ist

- (c) σ^2

zum Konfidenzniveau 0.95.

Aufgabe 3 (3 + 3 Punkte)

Die „WischiWaschi KG“ bestellt zur Herstellung ihrer Waschmaschinen elektrische Bauteile bei einem Lieferanten. Mit diesem wurde vereinbart, dass eine Charge mit 10000 Bauteilen höchstens 50 defekte Bauteile enthalten darf. Andernfalls hat die „WischiWaschi KG“ kostenlosen Anspruch auf eine neue Lieferung. Um zu testen ob eine Charge mehr als 50 defekte Bauteile enthält werden in der Qualitätskontrolle der „WischiWaschi KG“ einer Charge zufällig 5 Teile entnommen. Enthält die Stichprobe ein defektes Bauteil, so wird reklamiert.

- (a) Formuliere das beschriebene Vorgehen formal als Test. Benenne insbesondere die Hypothese und die Alternative und bestimme den Annahmebereich und den kritischen Bereich.
- (b) Bestimme die Gütefunktion des Tests.

Aufgabe 4 (3 + 3 Punkte)

Wir betrachten ein parametrisches Modell $\{F_{\theta}, \theta \in \Theta\}$, wobei der Parameterbereich $\Theta = \{1, 2, 3\}$ ist. Es wird zufällig ein Parameter $\theta \in \Theta$ gewählt. Hierbei sind alle möglichen Parameter gleichwahrscheinlich. Zur zugehörigen Verteilung F_{θ} liegt eine Zufallsstichprobe X_1, \dots, X_n vor. Desweiteren liegt ein Test der Hypothese $H_0 : \theta = 1$ gegen die Alternative $H_1 : \theta \in \{2, 3\}$ vor. Dieser besitzt die Gütefunktion G , mit $G(1) = 0,05, G(2) = 0,8$ und $G(3) = 0,6$.

- (a) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler erster Art und für einen Fehler zweiter Art.
- (b) Der Test akzeptiert die Hypothese. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehört die vorliegende Stichprobe zum Parameter $\theta = 1$?