Dr. Markus Kunze | WS 2013/14
Dipl.-Math. Stefan Roth | 6.12.2013

Stochastik für WiWi - Übungsblatt 7

Abgabe: 13. Dezember vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (3 + 2 + 3)

Die neueste Attraktion auf dem Ulmer Weihnachtsmarkt ist ein Glühweinautomat der Firma „Spiel- und Spaßautomaten“. Da das eigentliche Fachgebiet von „Spiel- und Spaßautomaten“ die Herstellung von Glücksspielautomaten ist, wurde der Glühweinautomat mit einem Zufallsgenerator ausgestattet. Ein Glühwein aus dem Automat kostet 3 €. Beim Einwurf dieser Summe bekommt man entweder gar keinen, einen oder zwei Becher Glühwein. Du lässt dir fünf mal hintereinander einen Glühwein aus dem Automaten und notierst dabei den entsprechenden Gewinn in Euro mit X, d.h. $X \in \{-3, 0, 3\}$. Das Ergebnis deiner Versuche ist $(-3, 3, -3, 0, 3)$. Mit Hilfe dieser Daten versuchst Du herauszufinden wie X verteilt ist.

(a) Wie würdest Du die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ergebnisse bestimmen, wenn Du keine weitere Information über die Form der Zähldichte hättest?

(b) Du willst es nun genau wissen und wirfst einen Blick auf die Homepage von „Spiel- und Spaßautomaten“. Dabei findest du heraus, dass X die folgende Zähldichte besitzt:

$$f(x,p) = \begin{cases} p & \text{falls } x \in \{-3, 0\} \\ 1-2p & \text{falls } x = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $p \in (0, 1/2)$. Konstruiere einen Schätzer für p gemäß der Momentenmethode aufgrund der vorliegenden Daten.

(c) Berechne $\mathbb{P}_p(X_1 = -3, X_2 = 3, X_3 = -3, X_4 = 0, X_5 = 3)$ also die Wahrscheinlichkeit, dass die vorhandene Stichprobe auftritt) unter der Annahme, dass der Gewinn wie in (b) angegeben verteilt ist. Für welchen Wert von p wird diese Wahrscheinlichkeit maximal?

Aufgabe 2 (2 + 3)

$X_1, \ldots, X_n$ sei eine Zufallsstichprobe der diskreten Verteilung mit folgender Zähldichte:

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{x^2} (1-\theta)^{1-x^2} & \text{falls } x \in \{-1, 0, 1\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Über den Parameter θ ist lediglich bekannt, dass er positiv und kleiner 1 ist.

(a) Stelle sicher, dass es sich bei f tatsächlich um eine Zähldichte handelt.

(b) Zeige, dass die Ableitung der log-Likelihoodfunktion nach θ durch

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \frac{n}{\theta}\hat{m}_2 - \frac{n}{1-\theta}(1-\hat{m}_2)$$

gegeben ist und konstruiere einen Maximum-Likelihood-Schätzer für θ. Hierbei sei $\hat{m}_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Aufgabe 3 (2 + 3)

Wirf zwei Münzen (mindestens) zwölfmal gleichzeitig und notiere 0, falls beide Münzen „Zahl“ zeigen und 1 sonst. Diese Notizen bilden die Stichprobe $(x_1, \ldots, x_{12})$ einer $\mathsf{b}_{1,p}$-Verteilung mit $p \in (0,1)$. Wir betrachten die Schätzer

$$T_1(x_1, \ldots, x_n) := \bar{x} \quad \text{und} \quad T_2(x_1, \ldots, x_n) := \frac{n \cdot \bar{x} + 1}{n+2}$$

für p.

(a) Berechne nach jedem Wurf beide Schätzer mit der aktuell vorhandenen Stichprobe.

(b) Liefern beide Schätzer immer plausible Ergebnisse? Sind sie erwartungstreu oder asymptotisch erwartungstreu oder weder noch?

Aufgabe 4 (3 + 3)

Betrachte erneut das Taxiproblem aus der Vorlesung. Sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Zufallsstichprobe zur Verteilung F_N, der Gleichverteilung auf den Zahlen $1, \ldots, N$. Betrachte die Schätzer $T_n(X_1, \ldots, X_n) := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

(a) Zeige, dass die Folge T_n schwach konsistent ist für N.
Hinweis: Verwende dafür die Verteilung des Maximums aus Aufgabe 3 von Blatt 6.

(b) Ist T_n ein erwartungstreuer Schätzer für N? (Die Antwort ist zu begründen!)