ulm university universität uulm

Dr. Markus Kunze
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2013/14
20.12.2013

Stochastik für WiWi - Übungsblatt 9

Abgabe: 10. Januar vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (3 + 3 + 3 + 1 Punkte)

Bestimme in (a), (b) und (c) die Konstante c so, dass $f_j,\ j = 1,2,3$ eine Dichte ist. Sei nun X_j absolutstetig mit Dichte f_j. Entscheide ob $\mathbb{E}X_j$ und $\mathsf{Var}(X_j)$ existieren und berechne sie gegebenenfalls. Berechne außerdem $\mathbb{P}(X_j \in A_j)$.

(a) $f_1(t) = \frac{c}{\sqrt{t}}\mathbb{1}_{(0,1)}(t)$, $A_1 = (0, 1/2)$.

(b) $f_2(t) = c \cdot e^{-|t|}$, $A_2 = \{x \in \mathbb{R} :\ |x - \mathbb{E}X_2| \geq 2\sqrt{\mathsf{Var} X_2}\}$.

(c) $f_3(t) = \frac{c}{1+t^2}$, $A_3 = (0, \infty)$.

Hinweis: $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\frac{d}{dx}\frac{1}{2}\log(1+x^2) = \frac{x}{1+x^2}$

(d) Vergleiche das Ergebnis in (b) mit der Abschätzung aus der Ungleichung von Tschebyscheff.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichte f gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_K(x, y),$$

wobei $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ die Kreisscheibe um den Punkt $(0, 0)$ mit Radius 1 sei. Berechne $\mathsf{Cov}(X, Y)$ und entscheide, ob X und Y unabhängig sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

An Heiligabend darf Markus ausnahmsweise länger aufbleiben und muss erst um 22:00 Uhr ins Bett. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Zeit (in Minuten) vom zum-Bett-gehen bis zum Einschlafen exponentialverteilt ist mit Parameter $\lambda = 0.05$. Von all dem unabhängig bringt das Christkind zu einem zufälligen, zwischen 0:00 Uhr und 1:00 Uhr gleichverteilten Zeitpunkt Geschenke für Markus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Markus noch wach, wenn das Christkind kommt?

Das Christkind hat auch Euch etwas mitgebracht:
Wiederholungsaufgaben (alle Punkte = Bonuspunkte).

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Urne A enthalte 5 weiße und 7 schwarze Kugeln und Urne B enthalte 8 weiße und 3 schwarze Kugeln. Wir ziehen zunächst zufällig eine Kugel aus A und fügen diese der Urne B hinzu. Danach wird zufällig eine Kugel aus B gezogen und zu A hinzugefügt. Zum Schluß wird zufällig eine Kugel aus A gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zuletzt gezogene Kugel weiß ist?

Aufgabe 5 (2 + 2 Punkte)

Seien $X \sim \mathsf{b}_{1,p}$, $Y = 1 - X$ und $Z = XY$.

(a) Bestimme die gemeinsame Verteilung von X und Y sowie von X und Z.

(b) Bestimme $\mathsf{Cov}(X, Y)$ und $\mathsf{Cov}(X, Z)$. Sind X und Z unabhängig? (Eine Antwort ist zu begründen!)

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Sei (X, Y) ein diskreter Zufallsvektor dessen Zähldichte gegeben ist durch

Y	$X = -1$	5	10
2	0.1	0.1	0.3
3	0.2	0.1	0.2

Berechne $\mathsf{Cov}(X, Y)$ und entscheide, ob X und Y unabhängig sind.

Schöne Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2014!