Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche, M.Sc.

WS 2013/2014
17. 10. 2013

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung - Übungsblatt 1

Abgabe am 24. 10. **vor** Beginn der Übung

- Übungsblätter müssen vor Beginn der Übung abgegeben werden, nach 16:15 Uhr können keine Lösungen mehr angenommen werden
- bitte Namen und SCL-Logins deutlich aufs Blatt schreiben
- es ist eine Anmeldung zur Vorlesung im SLC-Portal notwendig
- Übungsblätter sollen zu zweit abgegeben werden, stehen mehr als zwei Namen auf dem Blatt, können leider keine Punkte vergeben werden
- mehrere Blätter bitte tackern
- um zur Klausur zugelassen zu werden müssen insgesamt auf allen Übungsblättern mindestens 50% der Übungspunkte erreicht werden

Aufgabe 1 (2,5+3,5+1 Punkte)

Betrachte folgendes Zufallsexperiment: Eine Gruppe von Versuchspersonen füllt einen Fragebogen bestehend aus 4 Fragen aus (Antwortmöglichkeiten sind stets 'ja' und 'nein'). Dann wird ein Fragebogen rein zufällig ausgewählt. Es bezeichne A_k das Ereignis, dass die k-te Frage mit 'ja' beantwortet wird ($k = 1, 2, 3, 4$).

(a) Drücke die folgenden Ereignisse mit Hilfe der Ereignisse $A_1, \dots, A_4$ und geeigneter Mengenoperationen aus.

- A = 'Es wird jede Frage mit 'ja' beantwortet'
- B = 'Es wird keine Frage mit 'ja' beantwortet'
- C = 'Es wird genau eine Frage mit 'nein' beantwortet'
- D = 'Es wird mindestens eine Frage mit 'ja' beantwortet'
- E = 'Es werden genau zwei Fragen mit 'ja' beantwortet'

(b) Überlege, wie die zugehörige Grundmenge Ω definiert werden kann und gib die Ereignisse A_1, A, B, C, D und E als entsprechende Teilmengen von Ω an.

(c) Welche der Ereignisse A, B, C und D sind paarweise unvereinbar?

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

Betrachte den in der Vorlesung eingeführten Grenzwert einer Folge $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$. Beweise:

(a) Wenn $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, dann gilt $A_n \to \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$, für $n \to \infty$.

(b) Für beliebige $A_1, A_2, \ldots$ gilt stets $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.

Aufgabe 3 (1,5+2,5+2 Punkte)

(a) Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra und $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Zeige, dass auch $A_1 \setminus A_2$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, und $A_1 \triangle A_2$ in $\mathcal{F}$ enthalten sind.

(b) Sei $\mathcal{E}$ ein System von Teilmengen eines Grundraumes Ω. Die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ ist definiert als $\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}, \mathcal{F} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } \Omega\}$. Zeige, dass $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist.

(c) Gegeben sei der Grundraum Ω mit den Teilmengen $A \subset B \subset \Omega$ und sei $\mathcal{E} = \{A, B\}$. Geben Sie die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ an.

Aufgabe 4 (2+2,5+2,5 Punkte)
Überprüfe, ob die Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Wahrscheinlichkeitsräume bilden. Falls dies nicht der Fall ist, überprüfe ob $\mathcal{F}$ wenigstens eine σ-Algebra bildet.

(a) $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ hat nur endlich viele Elemente}\}$, $P(A) = 0$, falls A endlich viele Elemente besitzt und $P(A) = 1$, falls A unendlich viele Elemente besitzt.

(b) Ω ist eine überabzählbare Menge, $\mathcal{F} = \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ hat höchstens abzählbar viele Elemente}\}$, $P(A) = 0$, falls A höchstens abzählbar viele Elemente besitzt und $P(A) = 1$, falls A überabzählbar viele Elemente besitzt.

(c) $\Omega = \mathbb{N}_0$; $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \sum_{x \in A} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $\lambda > 0$, $A \in \mathcal{F}$

Aufgabe 5 (2+2 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}$. Zeige:

(a) $P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$,

(b) $P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A^c)P(B) - P(A^c \cap B)$.