Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche, M.Sc.

WS 2013/2014
19. 12. 2013

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung - Übungsblatt 10

Abgabe am 9. 1. 2014 **vor** Beginn der Übung

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2 Punkte)
Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable. Berechne das 2. Moment und die Varianz von X, falls

(a) $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$,

(b) $X \sim \text{Bin}(n, p)$ mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$,

(c) $X \sim \text{U}(a, b)$ mit Parametern $a < b$,

(d) $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$,

(e) $F_X(x) = (1 - 0.8e^{1-x})\, \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Es sei $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Berechne den Erwartungswert der Zufallsvariablen $X_1 = e^{-X}$, $X_2 = 2X$ und $X_3 = \max\{X, 1/3\}$.

Aufgabe 3 (1,5+2,5 Punkte)
Ein Weihnachtsbaumverkäufer hat einen (nicht zufälligen) Bestand von a Blautannen, $a \in \{0, \dots, n\}$, nach denen eine zufällige Nachfrage von X Stück besteht. Kann die Nachfrage durch den Bestand nicht gedeckt werden, entstehen Kosten von $p > 0$ € für jeden nachträglich zu bestellenden Baum. Jeder nicht verkaufte Baum verursacht Kosten von $h > 0$ €.

(a) Bestimme die Zufallsvariable $G(X)$, welche die Kosten für den Verkäufer bei Bestand a und Nachfrage X beschreibt.

(b) Berechne die erwarteten Kosten des Verkäufers, wenn X diskret gleichverteilt auf $\{1, \dots, n\}$ ist.

Hinweis: Siehe Blatt 4 für die Definition der diskreten Gleichverteilung.

Aufgabe 4 (4+3 Punkte)

Ein rechteckiges Grundstück der Länge a und Breite b soll vermessen werden. Leider beinhalten die Messgeräte einen zufälligen $N(0, \sigma^2)$-verteilten Fehler X, sodass stattdessen eine Länge von $a + X$ und eine Breite von $b + X$ gemessen wird.

(a) Zeige für alle $k \in \mathbb{N}$, dass

$$\mathbb{E}(X^k) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ ungerade ist,} \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (k-1)\, \sigma^k, & \text{falls } k \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Hinweis: Es darf angenommen werden, dass X^k integrierbar ist für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Berechne Erwartungswert und Varianz der Grundstücksfläche, die sich aus der gemessenen Länge $a + X$ und der Breite $b + X$ ergibt.

Aufgabe 5 (2+2,5+0,5 Punkte)

Sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit der Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{125}\, x\, e^{-y/5}, & \text{wenn } 0 < x < y < \infty, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechne die Randdichten von X und Y.

(b) Bestimme die Kovarianz von X und Y.

(c) Sind X und Y unabhängig?

Wir wünschen allen Studenten erholsame Ferien, ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins Jahr 2014!