Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche, M.Sc.

WS 2013/2014
9. 1. 2014

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung - Übungsblatt 11

Abgabe am 16. 1. 2014 **vor** Beginn der Übung

Aufgabe 1 (2+5 Punkte)

Es seien X und Y zwei reellwertige Zufallsvariablen. Berechne den Korrelationskoeffizienten von X und Y und überprüfe ob X und Y unabhängig sind, falls

(a) X und Y diskret verteilt sind mit gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p(x, y) = \frac{1}{12}(x^2 y + x) \qquad \text{für } x \in \{-1, 0, 1\} \text{ und } y \in \{1, 2, 3\}$$

(siehe Blatt 6 - Aufgabe 5 (a)),

(b) X und Y absolutstetig verteilt sind mit gemeinsamer Dichte

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + xy(x^2 - y^2)\exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) \qquad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)

Seien X, Y, Z quadratisch integrierbare Zufallsvariablen.

(a) Zeige für $a, b \in \mathbb{R}$, dass $\operatorname{Cov}(aX + bY, Z) = a \operatorname{Cov}(X, Z) + b \operatorname{Cov}(Y, Z)$.

(b) Zeige, dass $X - Y$ und $X + Y$ unkorreliert sind, wenn X und Y identisch verteilt sind.

(c) Seien X und Y unabhängig und $\mathrm{Bin}(1, p)$-verteilt, $0 < p < 1$. Sind dann $X - Y$ und $X + Y$ unabhängig?

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

Ein Anleger verfügt am Beginn einer Periode über 100.000 Euro. Er investiert 60.000 Euro in eine riskante Anlage, die eine zufallsabhängige Rendite X mit $\mathbb{E}X = 0,08$ und $\mathrm{Var}X = 0,0004$ besitzt. Die restlichen 40.000 Euro investiert er in eine sicherere Anlage, die eine zufallsabhängige Rendite Y mit $\mathbb{E}Y = 0,04$ und $\mathrm{Var}Y = 0,0001$ abwirft. Berechne den Erwartungswert und die Varianz des Vermögens Z am Ende der Periode, wenn X und Y

(a) unabhängige Zufallsvariablen sind,

(b) den Korrelationskoeffizienten $-0,3$ besitzen.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

(a) Es seien $r \in [1, \infty)$, $p, q > r$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, $X \in L^p$ und $Y \in L^q$. Beweise die folgende Ungleichung:

$$(\mathbb{E}(|XY|^r))^{\frac{1}{r}} \leq (\mathbb{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}} \, (\mathbb{E}(|Y|^q))^{\frac{1}{q}} \, .$$

(b) Seien X und Y absolutstetig verteilte Zufallsvariablen mit den Dichten

$$f_X(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \, , x \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad f_Y(y) = \frac{5}{3}y^{-\frac{8}{3}}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(y) \, , y \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass $\mathbb{E}(XY) \leq 7,4$.

Hinweis: Benutze eine der in der Vorlesung behandelten Ungleichungen. Achte genau auf deren Voraussetzungen!

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Es seien $a_1, \ldots, a_n$ positive Zahlen. Beweise mittels der Jensen-Ungleichung, dass

$$a_H \leq a_G \leq a_A,$$

wobei $a_A = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$ das arithmetische Mittel, $a_G = (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$ das geometrische Mittel und $a_H = (\frac{1}{n}(1/a_1 + \ldots + 1/a_n))^{-1}$ das harmonische Mittel bezeichnet.

Hinweise:

- Eine zweimal differenzierbare Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ heißt konvex, falls $\varphi''(x) \geq 0 \; \forall x \in D$.
- Sei $\varphi : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare konvexe Funktion. Wenn $X \in L^1$ und $\varphi(X) \in L^1$, dann gilt $\varphi(\mathbb{E}\, X) \leq \mathbb{E}\, \varphi(X)$ (Jensen-Ungleichung).