Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche, M.Sc.

WS 2013/2014
16. 1. 2014

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung - Übungsblatt 12

Abgabe am 23. 1. 2014 **vor** Beginn der Übung

Aufgabe 1 (3+3+3 Punkte)

(a) Es seien $X, X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit positivem Erwartungswert und endlichem zweiten Moment. Zeige mit Hilfe der Tschebyschew-Ungleichung, dass

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \ldots + X_n < X) = 0.$$

(b) Bei einer Folge von unabhängigen Würfen mit einem fairen Würfel beschreibe S_n die Summe der Augenzahlen nach dem n-ten Wurf. Zeige mit Hilfe der Tschebyschew-Ungleichung, dass

$$P\left(\frac{S_{100}}{100} \notin [3,4]\right) \leq \frac{7}{60}.$$

(c) Beantworte Aufgabe 1(b) von Übungsblatt 6 mit Hilfe der Tschebyschew-Ungleichung.

Aufgabe 2 (1+1+1+1+1+1 Punkte)

Es seien $X, X_1, X_2, \ldots$ reellwertige Zufallsvariablen und $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge von Ereignissen.

(a) Sei $X_n \sim \mathrm{Exp}(n)$. Zeige, dass $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$ für $n \to \infty$.

(b) Sei $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$ und $P(A_n) = \frac{1}{n}$. Zeige, dass $X_n \xrightarrow{P} 0$ für $n \to \infty$.

(c) Sei $X_n \sim \mathrm{Poi}(1/n)$. Zeige, dass $X_n \xrightarrow{L^2} 0$ für $n \to \infty$.

(d) Sei X_n diskret gleichverteilt auf $\{1, \ldots, n\}$ und $X \sim \mathrm{U}(0,1)$. Zeige, dass $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{d} X$ für $n \to \infty$.

(e) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und $X_n \sim \mathrm{U}(-a, a)$, $a > 0$. Zeige, dass $\max\{|X_1|, \ldots, |X_n|\} \xrightarrow{P} a$ für $n \to \infty$.

(f) Es habe X_n die Verteilungsfunktion $F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right)^n \mathbb{1}_{(1,\infty)(x)}$ mit $\alpha > 0$ und X habe die Verteilungsfunktion $G(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^\alpha}\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$. Zeige, dass $n^{-\frac{1}{\alpha}} X_n \xrightarrow{d} X$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 3 (2+2+2+2 Punkte)

Es sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen und $Y \sim \mathrm{U}(0,1)$.

(a) Es sei $X_n = n\,\mathbb{1}_{[0,1/n]}(Y)$. Zeige, dass $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$ für $n \to \infty$, aber **nicht** $X_n \xrightarrow{L^1} 0$ für $n \to \infty$.

(b) Es sei $X_n = \mathbb{1}_{[0,1/2+1/n]}(Y)$ und $X = \mathbb{1}_{[1/2,1]}(Y)$. Zeige, dass $X_n \xrightarrow{d} X$ für $n \to \infty$, aber **nicht** $X_n \xrightarrow{P} X$ für $n \to \infty$.

(c) Es sei $X_n \sim \mathrm{U}[1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n]$ und $X = 1/2$. Zeige, dass $X_n \xrightarrow{d} X$ für $n \to \infty$, und **nicht** $F_{X_n}(1/2) \to F_X(1/2) = 1$ für $n \to \infty$. Ist dies ein Widerspruch zur Aussage $X_n \xrightarrow{d} X$ für $n \to \infty$?

(d) Es sei $X_n \sim \mathrm{Bin}\left(1, \frac{1}{n}\right)$ und $X_1, X_2, \ldots$ seien unabhängig. Zeige, $X_n \xrightarrow{L^2} 0$ für $n \to \infty$, aber **nicht** $X_n \xrightarrow{f.s.} 0$ für $n \to \infty$.
Hinweis: Betrachte den Limes Superior der Folge $\{A_n\}$ mit $A_n = \{X_n = 1\}$ und nutze Th. 2.7.

Aufgabe 4 (3+2 Punkte)

(a) Es sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von fast sicher monoton wachsenden Zufallsvariablen. Zeige, dass die Folge fast sicher gegen eine Zufallsvariable X konvergiert, falls sie in Wahrscheinlichkeit gegen X konvergiert.

(b) Es seien $X_1, X_2, \ldots$ und $Y_1, Y_2, \ldots$ zwei Folgen von Zufallsvariablen mit $X_n \xrightarrow{P} X$ für $n \to \infty$ und $Y_n \xrightarrow{P} Y$ für $n \to \infty$. Zeige, dass dann $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$ für $n \to \infty$.