Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche, M.Sc.

WS 2013/2014
23. 1. 2014

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung - Übungsblatt 13

Abgabe am 30. 1. 2014 **vor** Beginn der Übung

Aufgabe 1 (2+4 Punkte)

(a) Es sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\, X_1 = 0$ und $\operatorname{Var} X_1 = \sigma^2 < \infty$. Zeige, dass

$$\frac{1}{\sqrt{n}\log n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} 0 \quad , \text{ für } n \to \infty.$$

(b) Es sei $Y_1, Y_2, \ldots$ eine Folge von identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\, Y_1 = \mu$ und $\operatorname{Var} Y_1 = \sigma^2 < \infty$. Außerdem sei Y_j unabhängig von Y_{j-k} und Y_{j+k} für alle $k \geq 2$ und für alle $j \in \mathbb{N}$. Zeige, dass

$$\frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n} \xrightarrow{P} \mu \quad , \text{ für } n \to \infty.$$

Hinweis: Nutze die Ungleichung von Tschebyschew.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien $A_1, A_2, \ldots$ Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zeige, dass die drei folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{P} 0$ für $n \to \infty$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$,

(iii) $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{L^2} 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n\log(n+1)}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log(n+1)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeige mit Hilfe des schwachen Gesetzes der großen Zahlen, dass $Y_n \xrightarrow{P} 0$ für $n \to \infty$, wobei $Y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Aufgabe 4 (2+2+2+2+2+2 Punkte)

Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $X, X_1, X_2, \ldots, Y, Y_1, Y_2, \ldots$ beliebige reellwertige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zeige:

(a) Wenn $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ und $Y_n \xrightarrow{f.s.} Y$ für $n \to \infty$, dann $X_n Y_n \xrightarrow{f.s.} XY$ für $n \to \infty$.

(b) Wenn $X_n \xrightarrow{P} X$ und $Y_n \xrightarrow{P} Y$ für $n \to \infty$, dann $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$ für $n \to \infty$.

(c) Wenn $X_n \xrightarrow{L^2} X$ und $Y_n \xrightarrow{L^2} Y$ für $n \to \infty$, dann $X_n Y_n \xrightarrow{L^1} XY$ für $n \to \infty$.

(d) Wenn $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ für $n \to \infty$, dann $\varphi(X_n) \xrightarrow{f.s.} \varphi(X)$ für $n \to \infty$.

(e) Wenn $X_n \xrightarrow{P} X$ für $n \to \infty$, dann $\varphi(X_n) \xrightarrow{P} \varphi(X)$ für $n \to \infty$.

(f) Wenn $X_n \xrightarrow{d} X$ für $n \to \infty$, dann $\varphi(X_n) \xrightarrow{d} \varphi(X)$ für $n \to \infty$.