Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche, M.Sc.

WS 2013/2014
30. 1. 2014

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung - Übungsblatt 14

Abgabe am 6. 2. 2014 **vor** Beginn der Übung

- Übungsblatt 14 ist das letzte Blatt auf das Punkte vergeben werden (24 Punkte + 5 Bonuspunkte)
- Um die Vorleistung zu bestehen sind somit 191 Punkte nötig.
- Nach bestandener Vorleistung bitte im Hochschulportal zur Klausur anmelden.

Aufgabe 1 (3+2+2 Punkte)
Seien $X_1, X_2, \ldots : \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\,|X_1| < \infty$. Außerdem sei $\mu = \mathbb{E}X_1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ und $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$. Zeige, dass

(a) $N(t) \xrightarrow{f.s.} \infty$ für $t \to \infty$ und $P(N(t) < \infty) = 1$ für jedes $t > 0$,

(b) $\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \xrightarrow{f.s.} \mu$ für $t \to \infty$,

(c) $\frac{t}{N(t)} \xrightarrow{f.s.} \mu$ für $t \to \infty$ und $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{f.s.} \frac{1}{\mu}$ für $t \to \infty$.

Aufgabe 2 (3+4 Punkte)
Es sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ eine stetige Funktion mit Integral

$$I = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Sei $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen U[0, 1]-verteilten Zufallsvariablen und sei

$$Z_n = \mathbb{1}_{\{Y_n \leq f(X_n)\}}\,.$$

(a) Zeige, dass $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i \xrightarrow{f.s.} I$ für $n \to \infty$.

(b) Wie groß muß n mindestens sein, damit $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $0,95$ maximal um $0,01$ von I abweicht? Beantworte die Aufgabe mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

Aufgabe 3 (3+4 Punkte)

Du hast dir eine neue Stoppuhr gekauft. Der Verkäufer hat dir mitgeteilt, dass bei jeder mit der Uhr gemessenen Zeit ein auf $[-a, a]$ gleichverteilter Fehler in Sekunden entsteht. Er weiß nicht welchen Wert a annimmt, versichert dir aber, dass $a \leq 3$ Sekunden gilt. Die Messfehler bei unterschiedlichen Messungen sind unabhängig voneinander. Wieviele Zeitmessungen musst du mindestens vornehmen, damit der im Durchschnitt (arithmetisches Mittel) entstandene Messfehler mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 betragsmäßig kleiner gleich 0,5 Sekunden ist? Beantworte die Frage

(a) mit Hilfe der Ungleichung von Tschebyschew,

(b) mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

Aufgabe 4 (3 Punkte + 5 Bonuspunkte)

(a) Für den Eröffnungstermin eines Hotels wurden vorab 1.500 Buchungen registriert. Es ist bekannt, dass jeder Kunde (unabhängig von anderen Kunden) seine Buchung bis zum Tag der Eröffnung mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 storniert. Bestimme mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Gäste, die nicht stornieren, im Intervall $[1190, 1230]$ liegt.

(b) Es sei $p \in (0, 1)$ und $q = 1 - p$. Zeige, dass für $p > q$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1.$$

Hinweis: Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und $\mathrm{Bin}(1, p)$-verteilte Zufallsvariablen. Dann gilt, dass $X_1 + \ldots + X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Einen Beweis dieser Aussage geben wir auf Übungsblatt 15.