Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche, M.Sc.

WS 2013/2014
6. 2. 2014

# **Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung** - Übungsblatt 15

Besprechung der Lösung am 13. 2. 2014

- Auf Übungsblatt 15 werden keine Punkte mehr vergeben.
- Der behandelte Stoff ist klausurrelevant.
- Es besteht die Möglichkeit die Lösungen freiwillig zur Korrektur abzugeben. Die korrigierten Blätter können dann ab Montag (17.2.) Nachmittag im Büro von Björn Kriesche abgeholt werden.
- Nicht vergessen: Bis 4 Tage vorher im Hochschulportal zur Klausur anmelden!

**Aufgabe 1**

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ mit Parametern $\mu_i \in \mathbb{R}$ und $\sigma_i^2 > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Zeige mit Hilfe charakteristischer Funktionen, dass

(a) $\dfrac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \sim \mathrm{N}(0, 1)$,

(b) $X_1 + \dots + X_n \sim \mathrm{N}(\mu_1 + \dots + \mu_n, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)$.

Hinweis: Nutze die aus der Vorlesung bekannte charakteristische Funktion einer $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilten Zufallsvariablen $X$: $\varphi_X(t) = \exp\left(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 2**

Seien $X_1, \dots, X_m$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei $X_i \sim \mathrm{Bin}(n_i, p)$ mit Parametern $p \in [0, 1]$ und $n_i \in \mathbb{N}$ für alle $i = 1, \dots, m$.

(a) Zeige, dass $X_1 + \dots + X_m \sim \mathrm{Bin}(n_1 + \dots + n_m, p)$.

(b) Berechne mit Hilfe der charakteristischen Funktion das dritte Moment von $X_1$.

**Aufgabe 3**

Sei $X \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Zeige, dass die charakteristische Funktion von $X$ durch $\varphi(x) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$ gegeben ist.

(b) Berechne mit Hilfe der charakteristischen Funktion die ersten fünf Momente von $X$. Lässt sich daraus eine Formel für das $n$-te Moment von $X$ herleiten?

(c) Sei $\lambda \in (0, 1)$ und $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen mit $X_n \sim \operatorname{Geo}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige mit Hilfe charakteristischer Funktionen, dass $\frac{1}{n} X_n \xrightarrow{d} X$ für $n \to \infty$.

**Aufgabe 4**

Zeige, dass für eine reellwertige Zufallsvariable $X$ die charakteristische Funktion genau dann reellwertig ist, wenn $X \overset{d}{=} -X$ gilt.

Hinweis: In Aufgabe 3 (a) und Aufgabe 4 könnte es nützlich sein die Eulersche Formel zur Darstellung der komplexen Exponentialfunktion zu nutzen: $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$.