Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche, M.Sc.

WS 2013/2014
14. 11. 2013

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung - Übungsblatt 5

Abgabe am 21. 11. **vor** Beginn der Übung

Aufgabe 1 (1+3 Punkte)

(a) Zeige, dass für die Wahrscheinlichkeitsfunktion $\{p_k\}$ der Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda > 0$ folgende Rekursionsgleichung gilt: $p_k = c(k)p_{k-1}$ für alle $k > 0$. Bestimme $c(k)$.

(b) Beweise die sogenannte Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung: Sei $X \sim \text{Geo}(p)$, dann gilt

$$P(\{X = n + k\} \,|\, \{X > n\}) = P(X = k) \quad \text{für alle } n, k > 0.$$

Aufgabe 2 (3+2 Punkte)

Eine Firma liefert einer Handelskette 500 durchnummerierte Erzeugnisse eines Produktes. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Erzeugnis beim Transport beschädigt wird, beträgt 0,002.

(a) Berechne die exakte Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(i) das zwölfte Erzeugnis das einzige beschädigte Erzeugnis ist,

(ii) die Lieferung maximal ein beschädigte Erzeugnis enthält,

(iii) das 250. Erzeugnis das erste beschädigte Erzeugnis ist.

(b) Berechne die approximative Wahrscheinlichkeit (laut dem Gesetz der seltenen Ereignisse) dafür, dass

(iv) die Lieferung mehr als ein beschädigtes Erzeugnis enthält,

(v) die Lieferung 5, 6 oder 7 beschädigte Erzeugnisse enthält.

Aufgabe 3 (3+2,5+3,5 Punkte)

(a) Ein Würfel wird viermal geworfen. Die Zufallsvariable X_1 gebe an, wie oft die Augenzahl kleiner oder gleich 2 ist. Gib eine geeignete Darstellung von $X_1 : \Omega \to C$ mit einem entsprechenden Grundraum Ω und Wertebereich C an. Bestimme und skizziere die Verteilungsfunktion von X_1.

(b) Sei $p \in [0, 1]$. Die Zufallsvariable X_2 habe die Verteilungsfunktion

$$F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x < -1, \\ 1 - p, & \text{wenn } -1 \leq x < 0, \\ 1 - p + \frac{1}{2}xp, & \text{wenn } 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & \text{wenn } x > 2 \end{cases}$$

Skizziere die Verteilungsfunktion F_{X_2}, und berechne $P(-1 < X_2 \leq -0.5)$, $P(X_2 = 0)$ und $P(X_2 > 1)$.

(c) Die Zufallsvariable X_3 habe die Verteilungsfunktion

$$F_{X_3}(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x < 0, \\ a + \frac{1}{2}(1 - e^{-x}), & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$$

Welche Werte darf a annehmen? Skizziere F_{X_3} und berechne $P(X_3 = 0)$, $P(0 \leq X_3 \leq 2)$ und $P(X_3^2 \leq 0.5)$.

Aufgabe 4 (1+2+3 Punkte)
Für welche Wahl von $c \in \mathbb{R}$ bilden die folgenden Funktionen Wahrscheinlichkeitsdichten?

(a) $f(x) = c(\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) - 2\mathbb{1}_{[0,1]}(x))$

(b) $f(x) = c(\sin x + 1)\mathbb{1}_{[0,\pi]}(x)$,

(c) $f(x) = \frac{1}{2c(1-c^2/3)}(1 - x^2)\mathbb{1}_{[-c,c]}(x)$.

Hinweise:

(1) Eine stückweise stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Wahrscheinlichkeitsdichte, falls

- $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

(2) Die Funktion $\mathbb{1}_B : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ wird als Indikatorfunktion der Menge B bezeichnet. Es ist $\mathbb{1}_B(x) = 1$ falls $x \in B$ und $\mathbb{1}_B(x) = 0$ falls $x \notin B$. Ist B ein beliebiges offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall, z.B. $B = [a, b]$, dann vereinfacht sich die Integration folgendermaßen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathbb{1}_{[a,b]}(x)\, dx = \int_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

Aufgabe 5 (2+2 Punkte) Ein Computerunternehmen stellt fest, dass sich die Lebensdauer (in Wochen) von produzierten Monitoren durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable X mit Parameter $\lambda > 0$ beschreiben lässt.

(a) Das Computerunternehmen nimmt an, dass λ den Wert $1/300$ hat. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Monitor zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 200$ Wochen und $t_2 = 300$ Wochen ausfällt.

(b) Wie muss der Parameter λ gewählt werden, damit mit Wahrscheinlichkeit $0,9$ die Lebensdauer eines Monitors mindestens 50 Wochen beträgt?