Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche, M.Sc.

WS 2013/2014
21. 11. 2013

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung - Übungsblatt 6

Abgabe am 28. 11. **vor** Beginn der Übung

Aufgabe 1 (2+4 Punkte)

(a) Sei $\Phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Zeige, dass $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Ein Meinungsforschungsinstitut will den voraussichtlichen Stimmenanteil $p \in [0,1]$ der Partei A ermitteln, wenn am Sonntag Bundestagswahl wäre. Dazu werden n Wahlberechtigte befragt und jeweils vermerkt, ob sie für die Partei A stimmen werden oder nicht. Wieviele Wahlberechtigte müssen mindestens befragt werden, um den Stimmenanteil der Partei mit einer Sicherheit von mindestens 95% auf eine absolute Genauigkeit von ±2% vorhersagen zu können?

Hinweis: Verwende den zentralen Grenzwertsatz von DeMoivre-Laplace und benutze einen der folgenden Werte: $\Phi(1,29) \approx 0,9$; $\Phi(1,65) \approx 0,95$; $\Phi(1,96) \approx 0,975$.

Aufgabe 2 (2,5+2,5 Punkte)

Sei U eine auf dem Intervall $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable ($U \sim \mathrm{U}(0,1)$).

(a) Sei $q \in (0,1)$. Zeige, dass die Zufallsvariable $V = 1 + \left\lfloor \frac{\log U}{\log q} \right\rfloor$ eine geometrische Verteilung mit Parameter $1-q$ besitzt.

(b) Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $W = -\frac{1}{\lambda}\log U$, wobei $\lambda > 0$ eine positive Konstante ist?

Hinweis: Betrachte in (a) die Zähldichte von V und in (b) die Verteilungsfunktion von W. Theoreme aus Kapitel 3.4 der Vorlesung sind für diese Aufgabe nicht erforderlich.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachte die Zufallsvariablen $X \sim F$ (d.h. X hat Verteilungsfunktion F) und $Y \sim G$ und es sei $(X,Y) \sim H$. Zeige, dass

$$\max\{F(x) + G(y) - 1, 0\} \leq H(x,y) \leq \min\{F(x), G(y)\} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4 (3+2 Punkte)

Ein zufälliger Punkt der Ebene sei durch seine kartesischen Koordinaten (X, Y) gegeben. Die bivariate Verteilung der Koordinaten habe die Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} c(R - \sqrt{x^2 + y^2}), & \text{falls } x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

die Dichte ist also auf dem Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius R konzentriert.

(a) Welchen Wert muss c annehmen, damit f tatsächlich eine Dichte bildet?

(b) Der Radius R sei nun gleich 2. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der zufällige Punkt (X, Y) in einem Kreis mit Radius 1 liegt.

Hinweis: Geh beim Integrieren von kartesischen zu Polarkoordinaten über.

Aufgabe 5 (3+4 Punkte)

(a) Die Ratingagentur Poody's soll die Kreditwürdigkeit eines Unternehmens bewerten. Das Ergebnis wird als Zufallsvektor (X, Y) modelliert, wobei $X : \Omega \to \{-1, 0, 1\}$ den Ausblick (negativ, gleich bleibend oder positiv) für die Entwicklung des Unternehmens und $Y : \Omega \to \{1, 2, 3\}$ die Bewertung des Unternehmens angibt. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion von (X, Y) sei gegeben durch

$$p(x,y) = \frac{1}{12}(x^2 y + x) \qquad \text{für } x \in \{-1, 0, 1\},\ y \in \{1, 2, 3\}.$$

Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Unternehmen mit einer 2 bewertet wird unter der Bedingung, dass es einen positiven Ausblick erhalten hat.

(b) Gegeben sei der Zufallsvektor (X, Y) mit gemeinsamer Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} x(y - x)e^{-y} & \text{, wenn } 0 < x \leq y < \infty, \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die bedingten Dichten von X unter $\{Y = y\}$ und von Y unter $\{X = x\}$.