

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung - Übungsblatt 8

Abgabe am 12. 12. vor Beginn der Übung

Aufgabe 1 (3+6 Punkte)

- (a) Seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$. Zeige, dass $X = X_1 + \dots + X_n$ Erlang-verteilt ist mit den Parametern n und λ .

Hinweis: Eine absolutstetige Zufallsvariable X heißt Erlang-verteilt mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda > 0$, falls ihre Dichte durch $f_X(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)$ gegeben ist.

- (b) Die Zufallsvariablen X und Y besitzen die gemeinsame Dichte

$$f_{(X,Y)}(x, y) = (x + \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2}) \mathbb{1}_{(0,1)^2}(x, y).$$

Bestimme die Dichten der Zufallsvariablen $X \cdot Y$ und X/Y .

Aufgabe 2 (2+2+2+2+2+2+2 Punkte)

Es sei X eine Zufallsvariable. Berechne den Erwartungswert von X , falls

- (a) $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$,
- (b) $X \sim \text{Geo}(p)$ mit Parameter $p \in (0, 1)$,
- (c) $X \sim \text{Bin}(n, p)$ mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$,
- (d) $X \sim U(a, b)$ mit Parametern $a < b$,
- (e) $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$,
- (f) X Pareto-verteilt ist mit Parametern $\alpha, k > 0$,
- (g) $F_X(x) = (1 - 0.8e^{1-x}) \mathbb{1}_{[1, \infty)}(x)$.

Hinweis: Eine absolutstetige Zufallsvariable X heißt Pareto-verteilt mit Parametern $\alpha, k > 0$, falls ihre Dichte durch $f_X(x) = \frac{\alpha}{k} \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha+1} \mathbb{1}_{[k, \infty)}(x)$ gegeben ist.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

In einem Casino werden die folgenden beiden Glücksspiele angeboten:

- (i) Spiel A: Ein Spieler kann Geld setzen und danach eine Münze werfen. Bei Kopf erhält er den doppelten Betrag zurück und das Spiel ist beendet. Bei Zahl verliert er seinen Einsatz, darf aber erneut Geld setzen und eine Münze werfen. Der Spieler beginnt mit 1 Euro Einsatz. Wenn er ein Spiel gewinnt, muss er aufhören und nimmt den Gewinn mit. Wenn er verliert, verdoppelt er seinen Einsatz und spielt weiter.
- (ii) Spiel B: Eine Münze wird solange geworfen, bis zum ersten Mal Kopf fällt. Wird im ersten Wurf Zahl geworfen, erhält der Spieler 1 Euro, für jedes weitere Mal Zahl wird der Gewinn verdoppelt, d.h. wird genau einmal Zahl geworfen erhält man 1 Euro, bei genau zweimal Zahl erhält man 2 Euro, bei genau dreimal Zahl erhält man 4 Euro und so weiter. Wird Kopf geworfen, ist das Spiel sofort beendet und der Spieler bekommt seinen Gewinn ausgezahlt.

Für beide Spiele wird eine dir unbekannte Teilnahmegebühr erhoben. Wieviel wärst du bereit zu zahlen um an den Spielen teilnehmen zu dürfen? Betrachte dazu den erwarteten Gewinn (nach Abzug eventueller Einsätze) des Spielers.