Prof. Dr. Volker Schmidt
Björn Kriesche, M.Sc.

WS 2013/2014
12. 12. 2013

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung - Übungsblatt 9

Abgabe am 19. 12. **vor** Beginn der Übung

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

(a) Betrachte das zweimalige Werfen eines fairen Würfels. Es seien X die Augenzahl beim ersten und Y die Augenzahl beim zweiten Wurf. Bestimme die Verteilung und den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Z = \max\{X, Y\}$.

(b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = c \cdot x \cdot \mathbb{1}_{[0,a]}(x)$ mit $a > 0$ und $c \in \mathbb{R}$. Welche Werte dürfen die Konstanten a und c annehmen, damit f die Dichte einer absolutstetigen Zufallsvariablen X mit $\mathbb{E}\,X = \frac{2}{3}$ ist?

Aufgabe 2 (2+3 Punkte)

Eine Pumpe sei ununterbrochen in Betrieb, bis sie ausfällt. Die Zufallsvariable X, die die zufällige Laufzeit der Pumpe beschreibt, sei absolutstetig verteilt mit Dichte $f_X(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, wobei $\lambda > 0$. Weiter sei bekannt, dass Pumpen dieser Bauart im Mittel 100 Stunden laufen, bis sie ausfallen.

(a) Wie ist der Parameter λ zu wählen, damit der Erwartungswert von X gleich der mittleren Laufzeit dieser Pumpen ist?

(b) Aus Sicherheitsgründen tauscht man eine Pumpe, sobald sie 100 Stunden lang im Einsatz war, gegen eine neue gleichartige aus. Bestimme die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Y, welche die Einsatzzeit einer Pumpe beschreibt, und berechne ihren Erwartungswert. (Die Einsatzzeit einer Pumpe ist die Zeit, die vergeht, bis die Pumpe entweder ausfällt oder ausgewechselt wird.)

Aufgabe 3 (3+4 Punkte)

(a) Sei X eine Zufallsvariable mit $P(X \geq 0) = 1$ und Verteilungsfunktion F. Zeige, dass

$$\mathbb{E}(X^r) = \int_0^\infty r x^{r-1} (1 - F(x))\, dx$$

gilt, falls $r > 0$.
Hinweis: Es kann angenommen werden, dass F stetig ist.

(b) Sei Y eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion G. Zeige, dass $\lim\limits_{y \to -\infty} y \cdot G(y) = 0$ eine notwendige Bedingung für die Integrierbarkeit von Y ist.

Hinweis: Zeige, dass $\mathbb{1}_B(Y)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable ist und berechne deren Erwartungswert.

Aufgabe 4 (1+2+2+2+2+2 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und sei F^{-1} die zugehörige Quantilfunktion.

(a) Zeige, dass F^{-1} monoton nichtfallend ist.

(b) Zeige, dass $F(F^{-1}(p)) \geq p$ für $0 < p < 1$ und $F^{-1}(F(x)) \leq x$ für $x \in \mathbb{R}$.

(c) Gib eine Verteilungsfunktion F an, sodass $F(F^{-1}(p)) > p$ für ein $p \in (0, 1)$ und $F^{-1}(F(x)) < x$ für ein $x \in \mathbb{R}$ (mit Beweis).

(d) Zeige, dass $F(F^{-1}(p)) = p \Leftrightarrow p$ liegt im Bild von F.

(e) Zeige, dass F^{-1} linksseitig stetig ist.

(f) Sei F stetig und streng monoton wachsend, und sei U eine auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimme die Verteilungsfunktion von $F^{-1}(U)$ und $F(X)$.