Dr. Jürgen Kampf
Judith Olszewski

Wintersemester 2014/2015

Statistische Methoden der Risikotheorie

Lösungen zu Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (9 Punkte)

(a) Die Verteilungsfunktion des Minimums ist

$$F(x) = \mathbb{P}(\min\{X_1, \ldots, X_n\} \leqslant x) = 1 - \mathbb{P}(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > x) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, \ldots, X_n > x) = 1 - (\mathbb{P}(X_1 > x))^n = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda\, x\, n) & \text{für } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \min\{X_1, \ldots, X_n\} \sim \mathrm{Exp}(\lambda n)$

$\mathbb{P}_{\lambda_0}(\underline{\theta} \leqslant \min\{X_1, \ldots, X_n\} \leqslant \overline{\theta}) = 1 - \alpha \Leftrightarrow F(\overline{\theta}) - F(\underline{\theta}) = 1 - \alpha$

Das ist erfüllt, falls $F(\overline{\theta}) = 1 - \alpha/2$ und $F(\underline{\theta}) = \alpha/2$

$F(\overline{\theta}) = 1 - \alpha/2 \Leftrightarrow 1 - \exp(-\lambda_0\, n\, \overline{\theta}) = 1 - \alpha/2 \Leftrightarrow \overline{\theta} = -\frac{\log(\alpha/2)}{\lambda_0\, n}$

$F(\underline{\theta}) = \alpha/2 \Leftrightarrow 1 - \exp(-\lambda_0\, n\, \underline{\theta}) = \alpha/2 \Leftrightarrow \underline{\theta} = -\frac{\log(1-\alpha/2)}{\lambda_0\, n}$

Somit sollte man H_0 verwerfen, falls

$\min\{x_1, \ldots, x_n\} < -\frac{\log(1-\alpha/2)}{\lambda_0\, n}$ oder $\min\{x_1, \ldots, x_n\} > -\frac{\log(\alpha/2)}{\lambda_0\, n}$.

Gütefunktion:

$$\mathbb{P}_\lambda(\varphi(X_1, \ldots, X_n) = 1) = 1 - \mathbb{P}_\lambda\left(-\frac{\log(1-\alpha/2)}{\lambda_0\, n} \leqslant \min\{X_1, \ldots, X_n\} \leqslant -\frac{\log(\alpha/2)}{\lambda_0\, n}\right)$$

$$= 1 - \exp\left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \log(1 - \alpha/2)\right) + \exp\left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \log(\alpha/2)\right)$$

$$= 1 - (1 - \alpha/2)^{\lambda/\lambda_0} + (\alpha/2)^{\lambda/\lambda_0}$$

(b) Es gilt $X_1 + \ldots + X_n \sim \Gamma(\lambda, n)$

Somit sollte man die Nullhypothese verwerfen, falls

$$X_1 + \ldots + X_n < \Gamma(\lambda_0, n)_{\alpha/2} \text{ oder } X_1 + \ldots + X_n > \Gamma(\lambda_0, n)_{1-\alpha/2},$$

wobei $\Gamma(\lambda, n)_q$ das q-Quantil der $\Gamma(\lambda, n)$-Verteilung ist.

Sei $F_{\Gamma(\lambda,n)}$ die Verteilungsfunktion der $\Gamma(\lambda, n)$-Verteilung.

Gütefunktion:

$$G(\lambda) = F_{\Gamma(\lambda,n)}(\Gamma(\lambda_0, n)_{\alpha/2}) + 1 - F_{\Gamma(\lambda,n)}(\Gamma(\lambda_0, n)_{1-\alpha/2}).$$

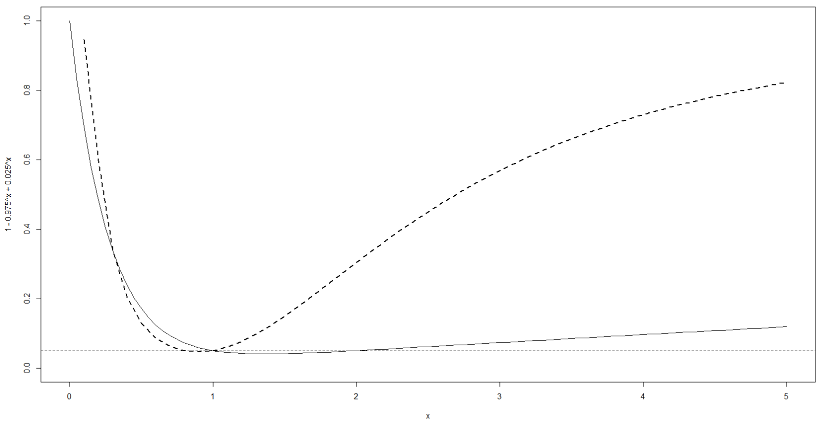

Figure 1:

(c) curve($1 - 0.975$ ^ $x + 0.025$ ^ x, xlim = $c(0, 5)$, ylim = $c(0, 1)$)
abline($h = 0.05$, lty=2)
lines($(1:50)/10$, pgamma(q = qgamma(scale=1, shape=3, p=0.025),
scale=$(1:50)/10$, shape=3) +1-pgamma(q=qgamma(scale=1, shape=3, p=0.975),
scale=$(1:50)/10$, shape=3), lwd=2, lty=2)

(d) **1. Test:**
1. Stichprobe: T(x) = 0.01
R: 2* pexp(0.01, rate=3) = 0.0591
R: 2* (1-pexp(0.01, rate=3)) = 1.9409
p-Wert: 0.0591
2. Stichprobe: T(x) = 0.1
R: 2* pexp(0.1, rate=3) = 0.5184
R: 2* (1-pexp(0.1, rate=3)) = 1.4816
p-Wert: 0.5184
2. Test
1. Stichprobe: T(x) = 0.01 + 1.3 + 2.1 = 3.41
R: 2* pgamma(3.41, scale=1, shape=3) = 1.3244
R: 2* (1-pgamma(3.41, scale=1, shape=3)) = 0.6756
p-Wert: 0.6756
2. Stichprobe: T(x) = 0.1 + 0.18 + 0.14 = 0.42
R: 2* pgamma(0.42, scale=1, shape=3) = 0.0181
R: 2* (1-pgamma(0.42, scale=1, shape=3)) = 1.9819
p-Wert: 0.0181

(e) Beide Gütefunktionen stimmen in 1 überein, allerdings ist die Gütefunktion des zweiten Tests meist größer als die des ersten. Somit ist der zweite Test zu bevorzugen.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

for (i in 1 : 1000){
    if (i %% 3 > 0){
    print(i)}
}

Aufgabe 3 (3 Punkte)

f <− function(x){
    $x * \exp(-\text{abs}(x))$}
x <− rnorm(10000)
y <− $f(x)$
mean(y)
var(y)

Aufgabe 4 (3 Punkte)

r <− rexp$(20, 1/2)$
y <− rep$(0, 20)$
curve(dexp$(x, 1/2)$, main = ”Dichte vs. simulierte Werte”, xlab=”simulierte Werte und x-Werte”, ylab=”Dichte der Exponentialverteilung”,xlim=$c(0, \max(r))$)
points(r, y)