Dr. Jürgen Kampf
Judith Olszewski

Wintersemester 2014/2015
19. Dezember 2014

Statistische Methoden der Risikotheorie

Übungsblatt 10

Abgabe: 9. Januar 2015

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Betrachte den Datensatz *drivers* in der Bibliothek *MASS*.

(a) Entscheide anhand des Wald-Wolfowitz-Tests, ob die Verteilungen der Anzahl der Unfalltoten in den Monaten Mai und August übereinstimmen. Bestimme hierbei, mit Hilfe eines Satzes aus der Vorlesung, approximativ das 5%-Quantil.

(b) Entscheide mit Hilfe des Binomialtests zum Niveau 5%, ob das 40%-Quantil der Anzahl der Unfalltoten im Monat Mai bei 1500 liegt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachte im multivariaten linearen Regressionsmodell den Spezialfall $m = 2$, d.h.
$Y = X\beta + \varepsilon$ mit

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \text{ und } \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass der Schätzer $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)^T = (X^T X)^{-1} X^T Y$ gleich dem Schätzer aus Stochastik 1 ist, d.h.

$$\hat{\beta}_2 = \frac{s^2_{xY}}{s^2_{xx}} \text{ und } \hat{\beta}_1 = \bar{Y}_n - \hat{\beta}_2\, \bar{x}_n,$$

wobei $s^2_{xx} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - \bar{x}_n^2)$ und $s^2_{xY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i\, Y_i - \bar{x}_n \bar{Y}_n)$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Das Produktionsvolumen der USA zwischen 1932 und 1953 lässt sich mit Hilfe der Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$$Y_t = e^{\beta_1} \cdot K_t^{\beta_2} \cdot A_t^{\beta_3} \cdot \varepsilon_t,\ t \in \{1, \ldots, 22\}$$

mit unbekannten Konstanten $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ beschreiben. Dabei bezeichnet Y die Produktion (in Mrd. Dollar), K den Kapitaleinsatz (in Mrd. Dollar) und A den Arbeitseinsatz (in Mio. Arbeitskräften). Auf der Homepage der Vorlesung befindet sich die Datei *production.dat*. Führe den Modellansatz in ein geeignetes lineares Modell über und bestimme den Kleinste-Quadrate-Schätzer für $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Betrachte das Regressionmodell

$$Z_i = X_i^a \cdot Y_i^b \cdot c^{\varepsilon_i},\ i = 1, \ldots, n,$$

wobei $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ bekannte deterministische Zahlen, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ unabhängig und nicht beobachtbar und a,b,c unbekannt sind. Es wird eine Realisierung der Zufallsvariabeln $Z_1, \ldots, Z_n$ betrachtet.

(a) Wandle das Modell in ein lineares Modell um.

(b) Berechne den kleinsten-Quadrate-Schätzer für a und b für folgende Daten:

X	10	10	1	1
Y	1	10	100	1000
Z	8	57	24	67