Dr. Jürgen Kampf
Judith Olszewski

Wintersemester 2014/2015
9. Januar 2015

# Statistische Methoden der Risikotheorie

## Übungsblatt 11

Abgabe: 16. Januar 2015

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

Sei $X$ ein $m$-dimensionaler Zufallsvektor, $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass

(a) $\mathbb{E}[A\,X+b] = A\,\mathbb{E}[X]+b$,

(b) $\operatorname{Cov}(A\,X+b) = A\operatorname{Cov}(X)\,A^T$.

**Aufgabe 2** (8 Punkte)

Folgendes darf ohne Beweis verwendet werden:

- Falls $A$ eine symmetrische positiv-definite $d\times d$-Matrix ist und $B$ eine $r\times d$-Matrix mit $\operatorname{rang}(B) = r \leqslant d$, dann sind $A^{-1}$ und $BAB^T$ ebenfalls positiv-definit.
- Falls $A$ eine symmetrische positiv-definite $d\times d$-Matrix ist, dann gibt es eine positiv-definite $d\times d$-Matrix $C$ mit $A = CC^T$.
- Falls $V$ eine symmetrische positiv-definite $d\times d$-Matrix ist, dann ist die Abbildung $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definiert durch $\|x\|_V = \sqrt{x^T V^{-1} x}$ für $x \in \mathbb{R}^d$ eine Norm.
- Eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ deren Hesse-Matrix in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^d$ positiv-definit ist, ist streng konvex.
- Ein lokaler Minimierer $x_0 \in \mathbb{R}^d$ einer streng konvexen Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ist immer der einzige globale Minimierer.

Betrachte das lineare Modell $Y = X\beta+\varepsilon$ für eine $n\times m$-Matrix $X$ mit $\operatorname{rang}(X) = m \leqslant n$, $\beta \in \mathbb{R}^m$ und Zufallsvektoren $Y, \varepsilon \in \mathbb{R}^n$. Nimm an, dass $\mathbb{E}\,\varepsilon = 0$ und die Kovarianzmatrix $V$ von $\varepsilon$ positiv-definit sei. Sei $\hat\beta$ der Kleinste-Quadrate-Schätzer bezüglich $\|\cdot\|_V$, d.h.

$$\hat\beta = \operatorname*{argmin}_{\beta\in\mathbb{R}^m} \|Y - X\beta\|_V.$$

(a) Zeige, dass

$$\|Y - X\beta\|_V = \sup_{u\in S^{n-1}} \frac{|< Y - X\beta, u >|}{\sqrt{\operatorname{Var}(< Y, u >)}}$$

wobei $S^{n-1} := \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = 1\}$.

(b) Zeige, falls $\varepsilon$ normalverteilt ist, dass dann der Kleinste-Quadrate-Schätzer $\hat\beta$ der Maximum-Likelihood-Schätzer ist.

(c) Zeige, dass $\hat{\beta} = (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} Y$.

(d) Zeige, dass $\mathbb{E}\hat{\beta} = \beta$.

(e) Zeige, dass die Kovarianzmatrix von $\hat{\beta}$ durch $(X^T V^{-1} X)^{-1}$ gegeben ist.

**Aufgabe 3** (3 Punkte)

Betrachte das lineare Modell $Y = X\beta + \varepsilon$ mit einer bekannten $m \times n$-Matrix $X$ mit $\mathrm{rang}(X) = m$, einem Zufallsvektor $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ für den gilt, dass $\mathbb{E}\varepsilon = 0$ und $\mathrm{Cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$ und einem unbekannten Vektor $\beta \in \mathbb{R}^m$. Sei $\hat{\beta}$ der Kleinste-Quadrate-Schätzer für $\beta$ und $\hat{\varepsilon} = Y - X\hat{\beta}$ der Residuenvektor. Zeige, dass

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}, \hat{\varepsilon}) := \mathbb{E}[(\hat{\beta} - \mathbb{E}\hat{\beta})(\hat{\varepsilon} - \mathbb{E}\hat{\varepsilon})] = 0.$$

**Aufgabe 4** (3 Punkte)

Betrachte erneut Blatt 10 Aufgabe 4. Schlage zwei Schätzer für $c$ vor. Einer soll auf dem erwartungstreuen Schätzer für die Varianz der Störgrößen beruhen, der andere auf dem Maximum-Likelihood-Schätzer.