Dr. Jürgen Kampf
Judith Olszewski

Wintersemester 2014/2015
16. Januar 2015

Statistische Methoden der Risikotheorie

Übungsblatt 12

Abgabe: 23. Januar 2015

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Berechne die natürliche Linkfunktion folgender Verteilungen.

(a) Gammaverteilung $\Gamma(\alpha, p)$, $\alpha, p > 0$.

(b) Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n, p)$, $p \in (0, 1)$, wobei $n \in \mathbb{N}$ bekannt sei.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Auf der Homepage der Vorlesung gibt es die Datei *challenger.dat*, die folgende Werte enthält:

Temperatur	53	57	58	63	66	67	67	67	68	69	70	70
Ausfall	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Temperatur	70	70	72	73	75	75	76	76	78	79	81	
Ausfall	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	

Der Wert *Temperatur* ist die Außentemperatur (in Fahrenheit) beim Start der 23 Space-Shuttle-Flüge vor der Challenger-Katastrophe. Der Parameter *Ausfall* gibt an, ob mindestens einer der Dichtungsringe wegen Materialermüdung ausgefallen ist (1) oder nicht (0).

(a) Untersuche mit Hilfe eines logistischen Regressionsmodells (Logit-Modells), wobei die erste Spalte der Designmatrix aus 1'en besteht, ob die Temperatur einen Einfluss auf das Auftreten solcher Materialermüdungserscheinungen hat, zum Niveau von 5%.

(b) Welche Wahrscheinlichkeit wird für das Versagen mindestens eines Dichtungsringes prognostiziert, wenn die Außentemperatur wie am Unglückstag $31°F$ beträgt?

(c) Wiederhole Teile a) und b) mit einem entsprechenden Probit-Modell.

Hinweis: In R gibt es die Funktionen *glm()* und *summary()*. Setze die Parameter *formula* und *family* geeignet.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Betrachte erneut Aufgabe 2 (Logit-Modell). Berechne $I_n(\hat{\beta})$ für $n = 23$.

Hinweis: Zeige, dass $I_{kj}(\beta) = \sum_{i=1}^n x_{ik} x_{ij} \frac{e^{x_i^T \beta}}{1+e^{x_i^T \beta}} \cdot \frac{1}{1+e^{x_i^T \beta}}$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Es sei ein verallgemeinertes lineares Regressionsmodell mit natürlicher Linkfunktion gegeben. Um zu untersuchen, wie sich der Erwartungswert der Zielvariablen unter kleinen Änderungen der einzelnen erklärenden Variablen verhält, müssen wir folgende Größen berechnen:

$$\frac{\partial \mathbb{E} Y}{\partial x_i} = \frac{\partial g^{-1}(x^T \beta)}{\partial x_i} = \frac{\partial g^{-1}(\beta_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_m x_m)}{\partial x_i}, i = 2, \ldots, m.$$

Führe eine solche Analyse für

(a) eine gammaverteilte Zielvariable mit Parameter $\alpha, p > 0$. Hierbei kann vorausgesetzt werden, dass $x^T \beta < 0$.

(b) eine Poisson-verteilte Zielvariable mit Parameter λ

durch und interpretiere das Ergebnis.