Dr. Jürgen Kampf
Judith Olszewski

Wintersemester 2014/2015
23. Januar 2015

Statistische Methoden der Risikotheorie

Übungsblatt 13

Abgabe: 30. Januar 2015

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Berechne basierend auf dem Datensatz in der folgenden Tabelle die Sterbewahrscheinlichkeit q_{50} mit Hilfe der Geburts-, der Sterbejahr-, der Sterbeziffer- und der Verweildauermethode.

Person	Geburtstag	Todesdatum	Eintritt nach Beobachtungsbeginn	Austritt vor Beobachtungsbeginn (nicht wegen Tod)
P1	3.3.1954	-	-	-
P2	1.8.1954	18.3.2005	-	-
P3	28.4.1955	5.2.2006	-	-
P4	24.9.1955	-	-	-
P5	11.3.1956	1.12.2006	-	-
P6	29.7.1956	-	1.8.2006	1.10.2006

Beobachtungszeitraum $B = [1.1.2005, 31.12.2006]$.
Hinweis: Für die Geburts- und Sterbejahrmethode sollte P6 ignoriert werden.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Wir modifizieren nun den Schätzer nach der Verweildauermethode.
Stirbt eine Person, setzt man ihre Verweildauer nicht mehr auf 1, sondern betrachtet einen Schätzer $\hat{D}_{x,j} = \hat{D}_x(t_j)$, dessen Wert vom Zeitpunkt t_j des Todes von j abhängt, dafür, wie lange die Verweildauer gewesen wäre, wenn j nicht gestorben wäre.
Wir betrachten folgendes Modell. Wir beobachten eine Menge von n Personen von ihrem x-ten Geburtstag bis zu einem zufälligen Beobachtungsende, spätestens jedoch bis zu ihrem $(x+1)$-ten Geburtstag. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass es keine Zugänge gibt. Die Beobachtungsdauer ist also für jede Person j eine auf $(0, 1]$ verteilte Zufallsvariable $D_{x,j}$. Weiter ist der Zeitraum zwischen dem x-ten Geburtstag und dem Tod von j eine stetige Zufallsvariable $T_{x,j}$ auf $(0, \infty)$. Die Zufallspaare $(D_{x,j}, T_{x,j})$, $j = 1, \ldots, n$ seien unabhängig und identisch verteilt. Außerdem seien $D_{x,j}$ und $T_{x,j}$ unabhängig. Wir nehmen an, dass $T_{x,1}$ bedingt auf $\{T_{x,1} \leqslant 1\}$ auf $(0, 1]$ gleichverteilt ist, d.h.

$$\mathbb{P}(T_{x,1} \leqslant t | T_{x,1} \leqslant 1) = t, t \in (0, 1].$$

Beobachtbar seien $\min(D_{x,j}, T_{x,j})$ und $\mathbb{1}(D_{x,j} < T_{x,j})$, d.h. der Zeitpunkt des früheren Ereignisses und die Information, welches Ereignis das frühere ist.

Zeige, dass der Schätzer

$$\hat{q}_x = \frac{\sum_{j=1}^n \mathbb{1}(T_{x,j} \leqslant D_{x,j})}{\sum_{j=1}^n \mathbb{1}(D_{x,j} < T_{x,j})\, D_{x,j} + \sum_{j=1}^n \mathbb{1}(T_{x,j} \leqslant D_{x,j})\, \hat{D}_x(T_{x,j})}$$

genau dann stark konsistent für die theoretische Sterbewahrscheinlichkeit $q_x = \mathbb{P}(T_x \leqslant 1)$, wenn der Schätzer $\hat{D}_x$ folgende abgeschwächte Erwartungstreue besitzt

$$\mathbb{E}[D_{x,1} | T_{x,1} \leqslant D_{x,1}] = \mathbb{E}[\hat{D}_x(T_{x,1}) | T_{x,1} \leqslant D_{x,1}].$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Betrachte die beiden Datensätze *bev.csv* und *sterbe.csv* auf der Homepage, in denen Bevölkerungszahlen zum Jahreswechsel und Sterbezahlen enthalten sind. Relevant seien nur die 0 bis 84-jährigen und der Zeitraum sei $B = [1.1.2010, 31.12.2013]$.

(a) Schätze die Sterbewahrscheinlichkeiten mit dem Sterbezifferverfahren und zeichne diese in ein Schaubild.

(b) Gleiche mit dem Verfahren von Whittaker-Henderson mit $s = 3$, $w_x = 1/85$ und $g = 0.1, 100, 1$ aus. Zeichne die jeweiligen Resultate in ein Schaubild.

(c) Belege, dass das Verfahren von Whittaker-Henderson für $g = 1$ annähernd mechanisch ist.