

Statistische Methoden der Risikotheorie

Übungsblatt 14

Abgabe: 6. Februar 2015

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei Σ eine positiv definite $n \times n$ - Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$ und entsprechenden Eigenvektoren $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\|\alpha_i\| = 1$, $i = 1, \dots, n$. Zeige, dass

$$\lambda_k = \sup_{\alpha \in S_k, \alpha \neq 0} \frac{\alpha^T \Sigma \alpha}{\|\alpha\|^2},$$

wobei $S_k = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \rangle^\perp$ das orthogonale Komplement für beliebige $k = 1, \dots, n$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $X = (X_1, X_2)$, wobei X_1 die Länge darstellt und X_2 das Gewicht. X_1 kann in *cm* oder in *m* gemessen werden, X_2 allerdings nur in *kg*. Im ersten Fall sei die Kovarianzmatrix gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 80 & 44 \\ 44 & 80 \end{pmatrix}$$

Berechne die erste Hauptkomponente in beiden Fällen.

Hinweis: Es ist erlaubt, R für die Berechnung zu verwenden.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ eine Zufallsstichprobe mit bekannter Kovarianzmatrix Σ und $\text{Var}(X_i) \in (0, \infty)$, $i = 1, \dots, n$. Seien $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$ die Eigenwerte von Σ . Außerdem sei α_i der Koeffizientenvektor der i -ten Hauptkomponente $\alpha_i^T X$, $i = 1, \dots, n$. Zeige, dass Σ folgende Spektraldarstellung besitzt:

$$\Sigma = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \alpha_i^T.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachte die Datensätze *Bev2.csv* und *Sterbe.csv*.

- (a) Führe zum Alter $x = 70$ und Beobachtungszeitraum von je einem Jahr das Sterbezifferverfahren für die Jahre 1991 bis 2013 durch.

- (b) Prognostiziere die Sterblichkeitsraten für die Jahre 2003 bis 2013 auf Basis der Jahre 1991 bis 2002 nach dem traditionellen Modell.
- (c) Prognostiziere die Sterblichkeitsraten für die Jahre 2003 bis 2013 auf Basis der Jahre 1991 bis 2002 nach dem Lee-Carter-Modell. Berechne die zusätzlich erforderlichen Sterbewahrscheinlichkeiten wieder mit dem Sterbezifferverfahren und Beobachtungszeitraum von je einem Jahr.
- (d) Stelle alle in a)-c) berechneten Werte graphisch dar.