Dr. Jürgen Kampf
Judith Olszewski

Wintersemester 2014/2015
6. Februar 2015

Statistische Methoden der Risikotheorie

Übungsblatt 15

Besprechung: 13. Februar 2015

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ ein Zufallsvektor mit zwei positiv korrelierten, jedoch nicht linear abhängigen, Einträgen. Zeige, dass dann die erste Hauptkomponente gegeben ist durch

$$\frac{1}{\sqrt{2}} X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} X_2.$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Berechne die Hauptkomponenten der Stichprobe

$$(8, -6), (8, -6), (7, 1), (-5, 10), (17, 6).$$

Hinweis: Die Lösung von Hand wird empfohlen.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Mache mittels `library(MASS)` und `data(Cars93)` einen Datensatz mit Informationen über Autos verfügbar.

(a) Berechne die Hauptkomponenten der Merkmale *EngineSize*, *Horsepower* und *RPM* dieser Autos.

(b) Nutze Teil a) um diese 3 Merkmale in einem 2-dimensionalen Scatterplot zu visualisieren. Markiere die Autos, die von Ford hergestellt wurden, rot.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^d$ mit empirischer Kovarianzmatrix $\widehat{\Sigma}$. Zeige

(a) Falls $a \in \mathbb{R}^d$ Eigenvektor mit $\|a\| = 1$ von $\widehat{\Sigma}$ zum Eigenwert λ ist, dann hat die Stichprobe $a^T x_1, \ldots, a^T x_m$ Varianz λ.
Bemerkung: Die Stichprobe $a^T x_1, \ldots, a^T x_m$ entsteht, indem die Stichprobe $x_1, \ldots, x_m$ auf die von a erzeugte Ursprungsgerade projiziert wird und diese Gerade dann mit $\mathbb{R}$ identifiziert wird.

(b) Der Hauptkomponentenparameter a_1 der Stichprobe ist Eigenvektor zum größten Eigenwert λ_1 von $\widehat{\Sigma}$.