Dr. Jürgen Kampf
Judith Olszewski

Wintersemester 2014/2015
31. Oktober 2014

Statistische Methoden der Risikotheorie

Übungsblatt 3

Abgabe: 7. November 2014

Hinweis: Die Übungsblätter können auch zu dritt abgegeben werden!

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) := ([-1,1], \mathcal{B}(\Omega), 1/2\ \lambda|_\Omega)$ sowie $X(\omega) := \omega^2, \omega \in \Omega$.

(a) Zeige, dass für $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$P(A|\sigma(X)) = 1/2\ (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{-A})\ \ P - \text{fast sicher},$$

wobei $-A := \{-\omega : \omega \in A\}$.

(b) Es sei $Y(\omega) := \omega^4$, $\omega \in \Omega$. Bestimme eine Version von $P(A|\sigma(Y))$.

Hinweis zu (a): Zeige, dass $\sigma(X) = \{A \in \mathcal{A} : A = -A\}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien X_1 und X_2 zwei Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Zeige, falls X_1 $\mathcal{G}$-messbar ist und $\mathbb{E}|X_1X_2| < \infty$, dann gilt

$$\mathbb{E}[X_1X_2|\mathcal{G}] = X_1\mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}].$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Außerdem gelte fast-sicher, $X_n \geqslant 0$ und $X_n \uparrow X,\ n \to \infty$. Zeige, dass für $n \to \infty$

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \uparrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\ \ \text{fast-sicher}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Außerdem gelte fast-sicher, $X_n \geqslant 0$ und $\varliminf\limits_{n\to\infty} X_n = X$. Zeige, dass

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \geqslant \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\ \ \text{fast-sicher}.$$