Dr. Jürgen Kampf
Judith Olszewski

Wintersemester 2014/2015
14. November 2014

Statistische Methoden der Risikotheorie

Übungsblatt 5

Abgabe: 21. November 2014

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Seien zwei Stichproben $x = (-3, 18, 13, 19, 29, 20)$ und $y = (6, -9, 3, -15, -4, 9)$ gegeben. Beide seien Realisierungen von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Standardabweichung von 10. Teste für beide Stichproben

$$H_0 : \mu = 20 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq 20 \quad \text{und} \quad H_0 : \mu \leqslant 20 \text{ vs. } H_1 : \mu > 20$$

unter Verwendung des Gauß-Tests zum Signifikanzniveau von 5%.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$, und $Y_i \sim \mathcal{N}(\nu, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, m$, wobei $\sigma > 0$ unbekannt ist. Man möchte

$$H_0 : \mu = \nu \text{ vs. } H_1 : \mu \neq \nu$$

testen.

(a) Zeige, dass

$$T(X, Y) := \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \, \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{S_{X,Y}} \sim t_{n+m-2},$$

wobei

$$S^2_{X,Y} := \frac{1}{n+m-2} \left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 + \sum_{i=1}^{m} (Y_i - \bar{Y}_m)^2 \right).$$

Verwende dies, um einen Test zum Signifikanzniveau α zu konstruieren.

(b) Sei nun $n = m$. Außerdem gehören die Zufallsvariablen X_i und Y_i nun zusammen, d.h. man betrachtet die Paare $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$. In diesem Fall ist es besser die folgende Teststatistik zu verwenden:

$$\widetilde{T}(X, Y) := \sqrt{n} \, \frac{\bar{Z}_n}{\widetilde{S}_Z},$$

wobei $Z_i = X_i - Y_i$, $i = 1, \ldots, n$ und $\widetilde{S}^2_Z = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (Z_j - \bar{Z}_n)^2$.
Berechne die Verteilung dieser Teststatistik unter H_0 und konstruiere einen auf dieser Test-Statistik basierenden Test zum Signifikanzniveau α.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien $x_1, \ldots, x_n$ Realisierungen von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ bekannt sei. Berechne die Gütefunktion des Tests von

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ vs. } H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_4$ vier unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \theta$ und $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - \theta$ für einen unbekannten Parameter $\theta \in (0, 0.4)$. Um

$$H_0 : \theta \in (0.3, 0.4) \text{ vs. } H_1 : \theta \in (0, 0.3]$$

zu testen werden verschiedene Test vorgeschlagen:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x_1 + \ldots + x_4 \leqslant 2 \\ 0 & , \text{ falls } x_1 + \ldots + x_4 > 2, \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x_1 + \ldots + x_4 \leqslant 0 \\ 0 & , \text{ falls } x_1 + \ldots + x_4 > 0, \end{cases}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x_1 + \ldots + x_4 > 3 \\ 0 & , \text{ falls } x_1 + \ldots + x_4 \leqslant 3, \end{cases}$$

$$\varphi_4(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x_1 + x_2 > x_3 \\ 0 & , \text{ falls } x_1 + x_2 \leqslant x_3. \end{cases}$$

(a) Berechne die Gütefunktionen aller vier Tests.

(b) Zeichne diese in ein gemeinsames Diagramm.

(c) Berechne den Umfang aller vier Tests.

(d) Welcher dieser vier Tests ist der sinnvollste?