Dr. Jürgen Kampf
Judith Olszewski

Wintersemester 2014/2015
28. November 2014

Statistische Methoden der Risikotheorie

Übungsblatt 7

Abgabe: 5. Dezember 2014
Hinweis: Die Übung beginnt um 8:30 Uhr!

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Seien die Voraussetzungen von einem der beiden Interpretationssätze des p-Wertes erfüllt. Sei darüber hinaus die Verteilungsfunktion F von $T(X)$ unter θ_0 bzw. $\theta \in \Theta_0$ stetig und streng monoton wachsend. Zeige:

(a) Sei Y eine Zufallsvariable mit einer stetigen und streng monoton wachsenden Verteilungsfunktion F, dann ist
$F(Y) \sim \mathrm{U}([0,1])$.

(b) Sei die Beobachtung X gemäß $\mathbb{P}_{\theta_0}$ bzw. $\mathbb{P}_\theta$, $\theta \in \Theta_0$, verteilt, so gilt für den p-Wert $p(X) \sim \mathrm{U}([0,1])$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$. Wir wollen

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \text{ vs. } H_1 : \lambda = \lambda_1$$

testen, wobei $\lambda_1 > \lambda_0$.

(a) Gib den Neyman-Pearson-Test zum Signifikanzniveau α an.

(b) Gib den Test explizit für $n = 5, \alpha = 0.01$ und $\lambda_0 = 5$ an.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{U}(0, b)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Parameter $b > 0$. Wir wollen

$$H_0 : b = b_0 \text{ vs. } H_1 : b = b_1$$

testen.

(a) Finde eine Statistik $T(X_1, \ldots, X_n)$, so dass $\mathrm{U}(0,b) \otimes \ldots \otimes \mathrm{U}(0,b)$ einen monotonen Dichtequotienten besitzt.

(b) Gib den Neyman-Pearson-Test in beiden Fällen $b_0 > b_1$ und $b_0 < b_1$ an.

(c) Wende die Tests von Teil b) für $\alpha = 5\%, b_0 = 2, b_1 = 4$ und $\alpha = 5\%, b_0 = 2, b_1 = 1$ auf die Stichprobe $(0.43, 1.56, 1.20, 0.81, 0.45)$ an.

(d) Diskutiere die Resultate von Teil c). Hierfür solltest du einen Nachteil finden, der sowohl für $b_1 = 4$ und $b_1 = 1$ besteht, und einen weiteren Nachteil, der nur für $b_1 = 1$ besteht.