Dr. Jürgen Kampf
Judith Olszewski

Wintersemester 2014/2015
5. Dezember 2014

Statistische Methoden der Risikotheorie

Übungsblatt 8

Abgabe: 12. Dezember 2014

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Zeige, dass die folgenden Familien einparametrische Exponentialklassen sind.

(a) $\Gamma(p_0, \lambda)$ für fixen Formparameter p_0.

(b) $\Gamma(p, \lambda_0)$ für fixen Ratenparameter λ_0.

(c) $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ bekannt und $\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\rho^2} & \frac{-\rho}{1-\rho^2} \\ \frac{-\rho}{1-\rho^2} & \frac{1}{1-\rho^2} \end{pmatrix}$, wobei $\rho \in (0,1)$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Bin}(m, p)$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit bekanntem Parameter m. Gib den einseitigen Neyman-Pearson-Test von

$$H_0 : p \leqslant 1/2 \text{ vs. } H_1 : p > 1/2$$

zum Signifikanzniveau α an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $x_1, \ldots, x_{100}$ Realisierungen von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{100}$. Die Häufigkeit der Intervalle sei

Intervall	$(-\infty, -1]$	$(-1, 0.5]$	$(-0.5, 0]$	$(0, 0.5]$	$(0.5, 1]$	$(1, \infty)$
(abs.) Häufigkeit	17	19	16	23	18	7

Wir möchten

$$H_0 : X_1 \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ vs. } H_1 : X_1 \text{ ist nicht } \mathcal{N}(0,1) \text{ - verteilt}$$

testen.

(a) Gib den p-Wert des Pearson-χ^2-Tests unter Verwendung der gleichen Klassen wie in der obigen Tabelle an.

(b) Gib den p-Wert des Pearson-χ^2-Tests unter Verwendung der Klassen

$$(-\infty, -1],\ (-1, 0],\ (0, 1],\ (1, \infty)$$

an.

Hinweis: In R kann mit Hilfe von *pchisq* die Verteilungsfunktion der χ^2-Verteilung berechnet werden.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen. Wir möchten

$$H_0 : X_1 \text{ ist normalverteilt vs. } H_1 : X_1 \text{ ist nicht normalverteilt}$$

testen. Für unabhängige Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ seien $Y_{(j)}$ die j-te Ordnungsstatistik, d.h.

$$\{Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}\} = \{Y_1, \dots, Y_n\} \text{ und } Y_{(1)} \leqslant \dots \leqslant Y_{(n)}.$$

Definiere $a_j := \mathbb{E}\, Y_{(j)}$ und betrachte die Statistik

$$T_n(X_1, \dots, X_n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } X_1 = \dots = X_n, \\ \frac{\sum_{i=1}^n a_i X_{(i)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechne $\sum_{i=1}^n a_i$.

(b) Seien $x_1, \dots, x_n$ Realisierungen von $X_1, \dots, X_n$. Zeige, dass $|T_n(x_1, \dots, x_n)| \leqslant 1$. Wann ist $T_n(x_1, \dots, x_n) = 1$? Erwartest du $T_n(x_1, \dots, x_n) \approx 1$ eher unter H_0 oder unter H_1?

(c) Zeige, dass die Verteilung von T_n nicht von den Parametern der Verteilung von X_1 abhängt, falls X_1 normalverteilt ist.

Der Test, der die Nullhypothese genau dann ablehnt, falls die betrachtete Realisierung von T_n kleiner als das α-Quantil der Verteilung von T_n unter der Nullhypothese ist, heißt Shapiro-Francia-Test.