Dr. Patricia Alonso-Ruiz
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2014/15
12.12.2014

Stochastik für WiWi - Übungsblatt 9

Abgabe: 9. Januar vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (2 + 2 + 3 Punkte)

Betrachte den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ mit $\Omega = (0,1)$ und $\Sigma = \mathscr{B}((0,1))$ die Borel σ-Algebra auf $(0,1)$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} : \mathscr{B}((0,1)) \to [0,1]$ ordne jedem Intervall (a,b), $0 \leq a < b \leq 1$ seine Länge zu (das sogenannte „Lebesguemaß“), d.h. $\mathbb{P}((a,b)) = b - a$.

(a) Finde zwei unabhängige Ereignisse $A_1, A_2 \in \Sigma$, sodass $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 1/2$.

(b) Finde eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X \sim \mathsf{Bin}(2, 1/2)$.

(c) Die Zufallsvariable $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$Y(\omega) = \begin{cases} 2\omega & \text{falls } \omega \in (0, \frac{1}{4}] \\ \frac{1}{2} & \text{falls } \omega \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 2\omega - 1 & \text{falls } \omega \in (\frac{3}{4}, 1) \end{cases}$$

Bestimme die Verteilungsfunktion F_Y von Y.

Aufgabe 2 (3 + 3 Punkte)

Die Zufallsvariable

(a) X habe Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq -2 \\ \frac{1}{4}(x+2) & \text{falls } x \in (-2, -1) \\ \frac{1}{4} & \text{falls } x \in [-1, -\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{falls } x \in [-\frac{1}{2}, 1) \\ 1 & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$$

Bestimme $\mathbb{P}(X \in A)$ für $A = \{-\frac{2}{3}\}$, $(-1, -\frac{1}{2})$ und $[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

(b) Y habe Verteilungsfunktion

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < -e \\ \frac{1}{2e^2}(x+e)^2 & \text{falls } -e \leq x < 0 \\ \frac{1}{4\pi}x + \frac{3}{4} & \text{falls } 0 \leq x \leq \pi \\ 1 & \text{falls } x > \pi \end{cases}$$

Bestimme $\mathbb{P}(Y < 0)$, $\mathbb{P}(Y > 0)$, $\mathbb{P}(Y = 0)$, $\mathbb{P}(Y = \pi)$, $\mathbb{P}(Y \in (-e, -\frac{1}{2}))$ und $\mathbb{P}(Y \in [-e, 1])$.

Skizziere F_X und F_Y.

Aufgabe 3 (3 + 3 + 3 + 1 Punkte)

Bestimme in (a), (b) und (c) die Konstante c so, dass $f_j,\ j = 1,2,3$ eine Dichte ist. Sei nun X_j absolutstetig mit Dichte f_j. Entscheide ob $\mathbb{E}X_j$ und $\mathsf{Var}(X_j)$ existieren und berechne sie gegebenenfalls. Berechne außerdem $\mathbb{P}(X_j \in A_j)$.

(a) $f_1(t) = \frac{c}{\sqrt{t-1}} \mathbb{1}_{(1,2)}(t)$, $A_1 = (1, 3/2)$.

(b) $f_2(t) = c \cdot e^{-|t|}$, $A_2 = \{x \in \mathbb{R} :\ |x - \mathbb{E}X_2| \geq 2\sqrt{\mathsf{Var} X_2}\}$.

(c) $f_3(t) = \frac{c}{1+t^2}$, $A_3 = (0, \infty)$.

Hinweis: $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\frac{d}{dx} \frac{1}{2} \log(1 + x^2) = \frac{x}{1+x^2}$

(d) Vergleiche das Ergebnis in (b) mit der Abschätzung aus der Ungleichung von Tschebyscheff.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit gemeinsamer Dichte f gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} \mathbb{1}_K(x, y),$$

wobei $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 4\}$ die Kreisscheibe um den Punkt $(0, 0)$ mit Radius 2 sei. Berechne $\mathsf{Cov}(X, Y)$ und entscheide, ob X und Y unabhängig sind.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

An Heiligabend darf Patricia ausnahmsweise länger aufbleiben und muss erst um 22:00 Uhr ins Bett. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Zeit (in Minuten) vom zum-Bett-gehen bis zum Einschlafen exponentialverteilt ist mit Parameter $\lambda = 0.05$. Von all dem unabhängig bringt das Christkind zu einem zufälligen, zwischen 0:00 Uhr und 1:00 Uhr gleichverteilten Zeitpunkt Geschenke für Patricia. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Patricia noch wach, wenn das Christkind kommt?

Das Christkind hat auch Euch etwas mitgebracht:
Wiederholungsaufgaben (alle Punkte = Bonuspunkte).

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Urne A enthalte 5 weiße und 7 schwarze Kugeln und Urne B enthalte 8 weiße und 3 schwarze Kugeln. Wir ziehen zunächst zufällig eine Kugel aus A und fügen diese der Urne B hinzu. Danach wird zufällig eine Kugel aus B gezogen und zu A hinzugefügt. Zum Schluß wird zufällig eine Kugel aus A gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zuletzt gezogene Kugel weiß ist?

Aufgabe 7 (2 + 2 Punkte)

Seien $X \sim \mathsf{Bin}(1, p)$, $Y = 1 - X$ und $Z = XY$.

(a) Bestimme die gemeinsame Verteilung von X und Y sowie von X und Z.

(b) Bestimme $\mathsf{Cov}(X, Y)$ und $\mathsf{Cov}(X, Z)$. Sind X und Z unabhängig? (Eine Antwort ist zu begründen!)

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Sei (X, Y) ein diskreter Zufallsvektor dessen Zähldichte gegeben ist durch

Y	$X = -2$	3	4
1	0.2	0.15	0.1
2	0.15	0.3	0.1

Berechne $\mathsf{Cov}(X, Y)$ und entscheide, ob X und Y unabhängig sind.

Schöne Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2015!