



## Stochastik für WiWi - 2. Klausur

### Hinweise:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Ein nicht programmierbarer Taschenrechner; Ein von Hand beschriftetes DIN A4 Blatt.
- **Bewertung:** Es gibt 110 Punkte; 100 Punkte entsprechen 100%. Der Lösungsweg muss stets nachvollziehbar sein; gemachte Aussagen müssen begründet werden.
- **Tabellen** für Standardnormalverteilung und t-Verteilung sind auf der Rückseite zu finden.

### Aufgabe 1 (6 + 5 + 7 Punkte)

Eine Urne enthält 5 rote und 3 blaue Kugeln. Es werden mit einem Griff zwei Kugeln gezogen.

- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass  $k$  rote Kugeln gezogen werden für  $k = 0, 1, 2$ .
- Die Zufallsvariable  $X$  bezeichne die Anzahl der gezogenen roten Kugeln. Skizziere die Verteilungsfunktion von  $X$ .
- Gezogene rote Kugeln werden entfernt, gezogene blaue Kugeln jedoch zurück in die Urne gelegt. Anschließend wird eine weitere Kugel gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass diese Kugel blau ist.

### Aufgabe 2 (7 + 8 Punkte)

Eine Klausur besteht aus 50 Multiple-Choice Fragen. Zu jeder Frage gibt es vier Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Du nimmst an dieser Klausur teil. Zu 35 der Fragen weißt Du sicher die Antwort. Du beschließt, bei den anderen Fragen zufällig eine Antwort anzukreuzen. Bei 10 Fragen kannst Du immerhin 2 Antwortmöglichkeiten als falsch ausschließen, sodass Du nur zwischen zwei Antworten wählen musst. Bei den verbleibenden 5 Fragen hast Du keine Ahnung und wählst zufällig eine der vier Möglichkeiten.

- Wie viele der 50 Fragen beantwortest Du im Schnitt richtig?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine richtig beantwortete Frage eine derer, die Du sicher beantwortet hast?

### Aufgabe 3 (4 + 4 + 8 Punkte)

Es sei  $f_p$  gegeben durch

$$f_p(x) = \begin{cases} 2p, & \text{falls } x \in \{-1, 1\} \\ p, & \text{falls } x = 0 \\ 1 - 5p, & \text{falls } x = 2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für welche  $p$  ist  $f_p$  eine Zähldichte? Von nun an betrachten wir nur noch solche  $p$  und bezeichnen mit  $F_p$  die Verteilung mit Zähldichte  $f_p$ .
- Es sei  $X \sim F_p$ . Berechne  $\mathbb{E}(X)$ .
- Konstruiere mit der Momentenmethode einen Schätzer für  $p$ . Schätze mit diesem Schätzer  $p$  basierend auf der Stichprobe  $(x_1, \dots, x_7) = (2, 1, 2, -1, 1, 2, 2)$ .

### Aufgabe 4 (12 + 6 + 6 Punkte)

Die gemeinsame Dichte des Zufallsvektors  $(X, Y)$  ist gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & \text{falls } x, y \geq 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Bestimme die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse  $\{X \leq 1, Y > 4\}$  und  $\{X < Y\}$ .
- Zeige, dass sowohl  $X$  als auch  $Y$  exponentialverteilt sind.
- Berechne  $\text{Cov}(X, Y)$  und entscheide, ob  $X$  und  $Y$  unabhängig sind.

### Aufgabe 5 (5 + 10 Punkte)

Es seien  $X_1, \dots, X_{150}$  unabhängig und identisch  $N_{10,4}$ -verteilt.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt  $X_1$  einen negativen Wert an?
- Berechne approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass von den Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_{150}$  mindestens 30 einen negativen Wert annehmen.

### Aufgabe 6 (6 + 8 + 8 Punkte)

Die günstige Bolognesesauce von nein! enthält laut Packungsangabe mindestens 30 g Hackfleisch. Bei der Untersuchung von 6 Gläsern ergeben sich folgende Werte:

$$29\text{g}, \quad 32\text{g}, \quad 31\text{g}, \quad 27\text{g}, \quad 31\text{g}, \quad 32\text{g}.$$

Es kann davon ausgegangen werden, dass es sich hierbei um die Realisierung einer Zufallsstichprobe zur Normalverteilung mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  handelt. Die Parameter  $\mu$  und  $\sigma^2$  sind nicht bekannt.

- Berechne das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz.
- Bestimme ein 90% Konfidenzintervall für  $\mu$ .
- Teste zum Signifikanzniveau 5% die Hypothese  $H_0 : \mu \leq 30$  gegen die Alternative  $H_1 : \mu > 30$ .

Wertetabelle zur Standardnormalverteilung

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Erklärung: Die Tabelle enthält auf fünf Nachkommastellen gerundete Werte von  $\Phi(x)$ , wobei  $0 \leq x \leq 4,09$  gilt und  $\Phi$  die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariable ist. Um den passenden Wert zu finden, sucht man in der ersten Spalte den Wert, der bis zur ersten Nachkommastelle  $x$  entspricht. Dann geht man bis zur Spalte der zweiten Nachkommastelle von  $x$  nach rechts. Beispielsweise steht  $\Phi(0,12)$  in der zweiten Zeile und dritten Spalte:  $\Phi(0,12) \approx 0,54776$ . Für negative  $x$  verwendet man die Symmetrie der Verteilungsfunktion: Es gilt  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ . Für  $x \geq 4,1$  verwenden wir die Näherung  $\Phi(x) \approx 1$ .

Quantile  $t_{n;\beta}$  zu Students  $t$ -Verteilung  $t_n$

n: Anzahl der Freiheitsgrade

Beispiel:  $t_{9;0,95} \approx 1.833$

n	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.9875	n
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	25.452	1
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.205	2
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.177	3
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.495	4
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.163	5
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	2.969	6
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.841	7
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.752	8
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.685	9
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.634	10
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.593	11
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.560	12
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.533	13
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.510	14
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.490	15
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.473	16
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.458	17
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.445	18
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.433	19
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.423	20

n	0.99	0.995	0.9975	0.9985	0.999	0.9995	n
1	31.821	63.657	127.321	212.205	318.309	636.619	1
2	6.965	9.925	14.089	18.216	22.327	31.599	2
3	4.541	5.841	7.453	8.891	10.215	12.924	3
4	3.747	4.604	5.598	6.435	7.173	8.610	4
5	3.365	4.032	4.773	5.376	5.893	6.869	5
6	3.143	3.707	4.317	4.800	5.208	5.959	6
7	2.998	3.499	4.029	4.442	4.785	5.408	7
8	2.896	3.355	3.833	4.199	4.501	5.041	8
9	2.821	3.250	3.690	4.024	4.297	4.781	9
10	2.764	3.169	3.581	3.892	4.144	4.587	10
11	2.718	3.106	3.497	3.789	4.025	4.437	11
12	2.681	3.055	3.428	3.706	3.930	4.318	12
13	2.650	3.012	3.372	3.639	3.852	4.221	13
14	2.624	2.977	3.326	3.583	3.787	4.140	14
15	2.602	2.947	3.286	3.535	3.733	4.073	15
16	2.583	2.921	3.252	3.494	3.686	4.015	16
17	2.567	2.898	3.222	3.459	3.646	3.965	17
18	2.552	2.878	3.197	3.428	3.610	3.922	18
19	2.539	2.861	3.174	3.401	3.579	3.883	19
20	2.528	2.845	3.153	3.376	3.552	3.850	20