Dr. Patricia Alonso-Ruiz
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2014/15
9.1.2015

# Stochastik für WiWi - Übungsblatt 10

Abgabe: 16. Januar vor Beginn der Übung.

**Aufgabe 1** (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

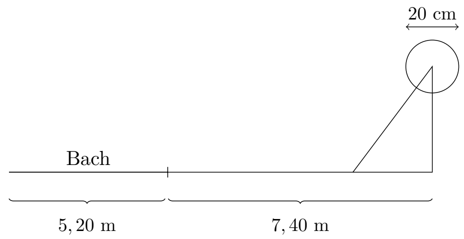
Zu Forschungszwecken wurde ein mittelalterliches Katapult nachgebaut. Es steht $7,40$m vom Ufer eines Baches entfernt, der $5,20$m breit ist. Die Munition besteht aus Steinkugeln, die einen Durchmesser von 20cm aufweisen. Nach einigen Probeschüssen wurde die Theorie aufgestellt, dass die Schussweite normalverteilt ist, im Mittel 10m beträgt und eine Standardabweichung von 5m hat.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine geschossene Kugel in vollem Umfang im Bach landet?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel über den Bach geschossen wird und (zumindest teilweise) am gegenüberliegenden Ufer aufschlägt?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schuss nach hinten los geht (d.h., dass die Kugel nicht zum Bach, sondern in die entgegengesetzte Richtung fliegt)?

(d) Elf Meter hinter dem Katapult befindet sich sich ein geparkter Wagen. Ist es ausgeschlossen, dass eine Kugel den Wagen beschädigt? Begründe deine Antwort.




**Aufgabe 2** (3 + 2 Punkte)

Die folgende Tabelle beschreibt die Veränderung der Getreidepreise (in Euro) in den Monaten Januar bis Dezember 2012.

| J | F | M | A | M | J | J | A | S | O | N | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.15 | 1.86 | -0.37 | -0.81 | 0.73 | 0.51 | 2.77 | 2.76 | 0.3 | 0.5 | -0.1 | 0.62 |

(a) Wir fassen die Daten in der Tabelle als Realisierungen einer Zufallsstichprobe $(X_1, \ldots, X_{12})$ auf, wobei bekannt sei, dass die zugehörige Verteilung Varianz $\sigma^2 = 1$ hat. Bestimme ein 95 % Konfidenzintervall für den unbekannten Erwartungswert $\mu$ unter Verwendung der Tschebyscheffschen Ungleichung.

(b) Bestimme ein 95 % Konfidenzintervall für den unbekannten Erwartungswert $\mu$ unter der Annahme, dass die Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_{12}$ normalverteilt sind mit Varianz $\sigma^2 = 1$.

(c) Wie groß müsste der Stichprobenumfang gewählt werden, damit das Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 höchstens die Länge 0.1 hat? Vergleiche die Fälle in (a) und (b).

**Aufgabe 3** (3 + 3 Punkte)

Aus Erfahrung sei bekannt, dass die Brenndauer einer Glühbirne einer bestimmten Sorte durch eine absolutstetige Zufallsvariable $X$ mit Dichte

$$f_\theta(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2}, \quad x \geq 0$$

beschrieben werden kann, wobei $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter ist.

(a) Bestimme einen Maximum-Likelihood-Schätzer für $\theta$.

(b) Die folgende Tabelle zeigt 15 Brenndauern (in 1000 Stunden) der Glühbirnen die in unabhängigen Versuchen ermittelt wurden.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1.530 | 1.173 | 1.832 | 1.075 | 1.539 |
| 0.998 | 2.083 | 0.693 | 2.529 | 1.639 |
| 1.325 | 1.487 | 1.298 | 1.743 | 1.432 |

Welches Ergebnis liefert der Maximum-Likelihood-Schätzer für $\theta$ aus Teil (a) für diese Daten?

**Aufgabe 4** (5 Punkte)

Ein Saatguthersteller verkauft sein Saatgut in Päckchen zu je 50 Körnern. Jedes Korn keimt dabei mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 unabhängig von den anderen Körnern. Der Hersteller verspricht, Päckchen kostenlos umzutauschen, falls 3 oder mehr der enthaltenen Körner nicht keimen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Hersteller mehr als 70 der 4000 zuletzt verkauften Päckchen umtauschen muss? (Verwende den zentralen Grenzwertsatz)

**Aufgabe 5** (3 + 2 Punkte), **Wiederholungsaufgabe (alle Punkte = Bonuspunkte)**

Sei $(X, Y)$ ein Zufallsvektor mit der gemeinsamen Dichte $f$ gegeben durch

$$f(x, y) = \frac{12}{(1 + x + y)^5}, \quad x, y \geq 0.$$

(a) Begründe, dass $f$ tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Berechne $\mathsf{Cov}(X, Y)$ und entscheide, ob $X$ und $Y$ unabhängig sind.