ulm university universität uulm

Dr. Patricia Alonso-Ruiz
Dipl.-Math. Stefan Roth

WS 2014/15
14.11.2014

Stochastik für WiWi - Übungsblatt 5

Abgabe: 21. November vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Die gemeinsame Verteilung zweier Zufallsvariablen X und Y sei gegeben durch

Y	$X=1$	2	3
1	p_1	p_2	p_3
2	p_4	0	p_5
3	0	p_6	0

Für $k = 1, 2, 3$ sei weiterhin bekannt, dass

- $\mathbb{P}(Y = 1 \,|\, X = k) = 2/3$.
- $\mathbb{P}(X = k \,|\, Y = 1) = k/6$.

Bestimme $p_1, \dots, p_6$.

Aufgabe 2 (2 + 3 Punkte)

Es sollen 100.000 € in Aktien investiert werden. Dabei stehen 2 Aktien zur Auswahl: Aktie 1 kostet 80 €, der erwartete Kurs in einem Jahr beträgt 90 €, bei einer Standardabweichung von 2 €. Aktie 2 kostet 120 €, der erwartete Kurs in einem Jahr beträgt 150 €, bei einer Standardabweichung von 10 €. Das Geld soll mit minimalem Risiko investiert werden. Als Risikomaß verwenden wir die Varianz, d.h. wir wollen die 100.000 € so investieren, dass der Wert unseres Portfolios in einem Jahr minimale Varianz hat. Wie ist das Geld zu investieren, wenn

(a) die Kurse in einem Jahr unabhängig sind?

(b) die Kurse in einem Jahr einen Korrelationskoeffizienten von $-0,4$ besitzen?

Zusätzlich wird stets davon ausgegangen, dass Leerverkäufe nicht erlaubt sind und dass die 100.000 € restlos investiert werden.

Aufgabe 3 (2 + 4 Punkte)

Beim Spiel „5-Finger-Morra“ zeigen beide Spieler zugleich ein bis fünf Finger. Gleichzeitig geben sie einen Tipp ab, wie viele Finger insgesamt gezeigt werden (also 2-10). Ruft ein Spieler die korrekte Anzahl, bekommt er einen Punkt. Wir gehen davon aus, dass beide Spieler die Anzahl der Finger die sie zeigen zufällig wählen, ohne eine Strategie zu bevorzugen. Es sei X die Anzahl der Finger, die Spieler 1 zeigt und Y sei die Anzahl der Finger, die Spieler 2 zeigt. Z sei die Gesamtzahl der gezeigten Finger.

(a) Bestimme die Zähldichte von Z.

(b) Besteht eine Korrelation zwischen der Gesamtzahl und der Anzahl der Finger die Spieler 1 zeigt? Berechne $\mathrm{cov}(X, Z)$ und den Korrelationskoeffizienten $\rho(X, Z)$.

Aufgabe 4 (3 + 1 + 3 Punkte)

Betrachte folgendes Experiment: In einer Urne befindet sich zu Beginn eine rote Kugel. Wir werfen eine faire Münze so lange, bis sie „Kopf“ zeigt. Fällt im X-ten Versuch zum ersten mal „Kopf“, so legen wir anschließend X blaue Kugeln dazu. Wir mischen die Kugeln in der Urne durch und ziehen eine Kugel. Y sei die Anzahl der gezogenen roten Kugeln.

(a) Bestimme die Verteilung von Y.

(b) Begründe ohne Rechnung, welches Vorzeichen die Kovarianz von X und Y haben wird.

(c) Bestimme $\mathrm{cov}(X, Y)$.

Hinweis: Verwende in Teil (a) folgende Identität:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t x^k dx = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} x^k dx = \int_0^t \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) dx = -\log(1-t) - t$$

für $t \in (0, 1)$.