



Stochastik für WiWi - Übungsblatt 7

Abgabe: 5. Dezember vor Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

Eine Firma verkauft für 1200 € ein Gerät, bei dem zwei Teile T_1 und T_2 mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_1 = 0.1$ und $p_2 = 0.05$ (unabhängig voneinander) während der Garantiezeit ausfallen. Die Reparatur von T_1 kostet 50 €, die von T_2 dagegen 200 €.

- Bestimme die erwarteten Reparaturkosten bei einem Gerät, sowie deren Varianz.
- Die anfallenden durchschnittlichen Reparaturkosten sollen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % um höchstens 20 € vom Erwartungswert abweichen. Wie viele Geräte muss die Firma dafür mindestens verkaufen?*

Aufgabe 2 (3 + 2 + 3 Punkte)

Nach dem durchschlagenden Erfolg des Glühweinautomaten auf dem letzten Ulmer Weihnachtsmarkt hat die Firma „Spiel- und Spaßautomaten“ beschlossen in diesem Jahr das Angebot durch einen Crêpes-Automaten zu ergänzen. Dabei hat man die Auswahl zwischen Nougat- und Zimtfüllung. Da das eigentliche Fachgebiet von „Spiel- und Spaßautomaten“ (nach wie vor) die Herstellung von Glücksspielautomaten ist, wurde der Crêpes-Automat mit einem Zufallsgenerator ausgestattet. Ein Crêpes mit Nougatfüllung aus dem Automat kostet 4 €, einer mit Zimtfüllung 3 €. Beim Einwurf der Summe bekommt man entweder den gewählten Crêpes, gar keinen oder sowohl den Nougat- als auch den Zimt-Crêpes. Du lässt dir fünf mal hintereinander einen Crêpes mit Zimtfüllung aus dem Automaten und notierst dabei den entsprechenden Gewinn in Euro mit X , d.h. $X \in \{-3, 0, 4\}^\dagger$. Das Ergebnis deiner Versuche ist $(4, -3, 0, 0, 4)$. Mit Hilfe dieser Daten versuchst Du herauszufinden wie X verteilt ist.

- Wie würdest Du die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ergebnisse bestimmen, wenn Du keine weitere Information über die Form der Zähldichte hättest?
- Du willst es nun genau wissen und wirfst einen Blick auf die Homepage von „Spiel- und Spaßautomaten“. Dabei findest du heraus, dass X die folgende Zähldichte besitzt:

$$f(x, p) = \begin{cases} 3p/4 & \text{falls } x \in \{-3, 0\} \\ 1 - 3p/2 & \text{falls } x = 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $p \in (0, 2/3)$. Konstruiere einen Schätzer für p gemäß der Momentenmethode aufgrund der vorliegenden Daten.

- Berechne $\mathbb{P}_p(X_1 = 4, X_2 = -3, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 4)$ also die Wahrscheinlichkeit, dass die vorhandene Stichprobe auftritt) unter der Annahme, dass der Gewinn wie in (b) angegeben verteilt ist. Für welchen Wert von p wird diese Wahrscheinlichkeit maximal? Skizziere für diesen Wert von p die Verteilungsfunktion von X .

*Verwende die Ungleichung von Tschebyscheff.

†Bekommst du keinen Crêpes ist der Gewinn -3 , bei einem mit Zimt 0 und wenn du beide bekommst 4.

Aufgabe 3 (2 + 3)

X_1, \dots, X_n sei eine Zufallsstichprobe der diskreten Verteilung mit folgender Zähldichte:

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{x^2} (1-\theta)^{1-x^2} & \text{falls } x \in \{-1, 0, 1\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Über den Parameter θ ist lediglich bekannt, dass er positiv und kleiner 1 ist.

- Stelle sicher, dass es sich bei f tatsächlich um eine Zähldichte handelt.
- Zeige, dass die Ableitung der log-Likelihoodfunktion nach θ durch

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \frac{n}{\theta} \hat{m}_2 - \frac{n}{1-\theta} (1 - \hat{m}_2)$$

gegeben ist und konstruiere einen Maximum-Likelihood-Schätzer für θ . Hierbei sei $\hat{m}_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2$.

Aufgabe 4 (2 + 3)

Wirf zwei Münzen (mindestens) zwölfmal gleichzeitig und notiere 0, falls beide Münzen „Zahl“ zeigen und 1 sonst. Diese Notizen bilden die Stichprobe (x_1, \dots, x_{12}) einer $\text{Bin}(1, p)$ -Verteilung mit $p \in (0, 1)$. Wir betrachten die Schätzer

$$T_1(x_1, \dots, x_n) := \bar{x} \quad \text{und} \quad T_2(x_1, \dots, x_n) := \frac{n \cdot \bar{x} + 1}{n + 2}$$

für p .

- Berechne nach jedem Wurf beide Schätzer mit der aktuell vorhandenen Stichprobe.
- Liefere beide Schätzer immer plausible Ergebnisse? Sind sie erwartungstreu oder asymptotisch erwartungstreu oder weder noch?