Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Alexander Nerlich

WS 2014/2015
16.10.2014

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 1

Abgabe am 23.10.2014 vor Beginn der Übung

Bevor es mit den Aufgaben losgeht hier einige Bemerkungen zu den Übungsblättern bzw. zur Übung:

i) Um Punkte für Ihre abgegebenen Übungsblätter zu erhalten müssen Sie sich im SLC für die Vorlesung anmelden.

ii) Es sind 50 Prozent aller Übungsblattpunkte nötig um für die Klausur zugelassen zu werden.

iii) Die Übungsblätter sollten nach Möglichkeit zu zweit abgegeben werden. (Abgaben von mehr als 2 Personen sind nicht zulässig.)

1. (6 Punkte) Sei Ω ein beliebiger Raum und sei $\mathfrak{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω, so ist $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ trivialerweise ein Messraum. Ferner nehmen wir an, dass Ω mindestens 2 Elemente enthält und definieren für $a, b \in \Omega$ die Abbildung $\sigma_{a,b} : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, 1]$ durch

$$\sigma_{a,b}(A) := \begin{cases} 1, & A \cap \{a, b\} \neq \emptyset \\ 0, & A \cap \{a, b\} = \emptyset \end{cases} \tag{1}$$

für jedes $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

i) $\sigma_{a,b}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, falls $a \neq b$.

ii) $\sigma_a := \sigma_{a,a}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

2. (7 Punkte) Seien (Ω_1, Σ_1) und (Ω_2, Σ_2) beliebige Messräume. Ferner sei $P_1 : \Sigma_1 \to [0, 1]$ ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß und $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ sei so, dass

$$f^{-1}(B) \in \Sigma_1 \tag{2}$$

für alle $B \in \Sigma_2$ gilt. Zeigen Sie das $P_2 : \Sigma_2 \to [0, 1]$, mit

$$P_2(A) := P_1(f^{-1}(A)) \; \forall A \in \Sigma_2 \tag{3}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω_2, Σ_2) definiert. Zeigen Sie hierbei zunächst, dass

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \; \forall A, B \subset \Omega_2 \tag{4}$$

gilt.
Hinweis: Für den Beweis wird es sich als nützlich erweisen, dass $f^{-1}(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \cup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(A_j)$ für beliebige $A_1, A_2, ... \subset \mathbb{R}$ gilt. Dies dürfen Sie ohne Beweis annehmen, da der Beweis absolut analog zum Beweis von (4) erfolgt.

3. (5 Punkte) Sei (Ω, Σ, P) ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen oder wiederlegen Sie die folgenden Aussagen.

i) $P(B\backslash A) = P(B) - P(A)$ für alle $A, B \in \Sigma$.

ii) $P(A\Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$ für alle $A, B \in \Sigma$, wobei $A\delta B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$

4. (6 Punkte) Seien die Folgen von Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ durch

$$A_n := \begin{cases} \mathbb{Z}_{\geq 0}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \mathbb{Z}_{\leq 0}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{5}$$

und

$$B_n := \begin{cases} \mathbb{Z}_{\geq n} \cup \{0\}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \mathbb{Z}_{\leq -n} \cup \{0\}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{6}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert. Zeigen oder widerlegen Sie ob

$$\lim_{n\to\infty} A_n \tag{7}$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} B_n \tag{8}$$

existiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.