Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Alexander Nerlich
WS 2014/2015

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
Übungsblatt 10

Abgabe am 08.01.2015 vor Beginn der Übung

Sei (Ω, Σ, P) stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.
Hier und in allem Folgenden bezeichnen wir mit L^p, $p \geq 1$, den Raum der Äquivalenzklassen über $\mathcal{L}^p$ bzgl. der Äquivalenzrelation der fast sicheren Gleichheit.
Obwohl diese Räume keine Zufallsvariablen enthalten, sondern Äquivalenzklassen, schreiben wir trotzdem für eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$, welche $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ erfüllt, dass $X \in L^p$ gilt, obwohl wir darauf verweisen wollen, dass es formalerweise: "Sei $X \in [X]$ ein Vertreter der Äquivalenzklasse $[X] \in L^p$ von Funktionen, welche P-f.s. mit X übereinstimmen" heißen müsste.

1.(12 Punkte) Ziel dieser Aufgabe ist es zu untersuchen, ob die in der Vorlesung eingeführten Grenzwerte eindeutig sind. Sei hierzu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und X, Y Zufallsvariablen. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen

i) Gilt $\lim_{n\to\infty} X_n \overset{\text{f.s.}}{=} X$ und $\lim_{n\to\infty} X_n \overset{\text{f.s.}}{=} Y$, so gilt $X \overset{\text{f.s.}}{=} Y$.

ii) Gilt $\lim_{n\to\infty} X_n \overset{\text{P}}{=} X$ und $\lim_{n\to\infty} X_n \overset{\text{P}}{=} Y$, so gilt $X \overset{\text{f.s.}}{=} Y$.

iii) Gilt $\lim_{n\to\infty} X_n \overset{L^p}{=} X$ und $\lim_{n\to\infty} X_n \overset{L^p}{=} Y$, für ein $p \geq 1$, so gilt $X \overset{\text{f.s.}}{=} Y$.

iv) Gilt $\lim_{n\to\infty} X_n \overset{\text{d}}{=} X$ und $\lim_{n\to\infty} X_n \overset{\text{d}}{=} Y$, so gilt $X \overset{\text{f.s.}}{=} Y$.

2. (2+2 Punkte) Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Stetigkeit im Stetigkeitssatz 6.4.3 eine nötige Annahme ist. Betrachten Sie hierzu die Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, $P(X_n = \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f(x) := \mathbb{1}\{x \in (0, \infty)\}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

i) $\lim_{n\to\infty} X_n \overset{P}{=} 0$ (also insbesondere in Verteilung), aber dennoch

ii) $\lim_{n\to\infty} f(X_n) \overset{d}{\neq} f(0)$

gilt.

3.(4 Punkte) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ weitere Zufallsvariablen. Ferner nehmen wir an, dass $|X_n| \leq Y$ f.s., für alle $n \in \mathbb{N}$ und $Y \in L^p$ für ein $p \geq 1$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} X_n \overset{f.s.}{=} X \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} X_n \overset{L^p}{=} X \tag{1}$$

gilt.

4.(10 Punkte) Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

i) Sei $X \sim Ber(\frac{1}{2})$, $X_n := X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $Y := 1 - X$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} X_n \overset{d}{=} Y$.

ii) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} X_n \overset{f.s.}{=} Y$, oder $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = Y$, im L^p-Sinne, für alle $p \geq 1$, oder $\lim\limits_{n\to\infty} X_n \overset{P}{=} Y$, wobei sämtliche Zufallsvariablen wie in i) definiert seien.

iii) Sei $Y \sim U(0,1)$ und sei $X_n := n\mathbb{1}\{Y \in (0, \frac{1}{n})\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} X_n \overset{f.s.}{=} 0$.

iv) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert im L^p-Sinne für jedes $p \geq 1$, wobei sämtliche Zufallsvariablen wie in iii) definiert seien.

5.(2+4 Punkte) Lösen Sie alle nachfolgenden Aufgaben.

i) Geben Sie ein Beispiel einer Folge von Zufallsvariablen, welche zwar stochastisch aber nicht fast sicher konvergiert.

ii) Zeigen Sie, dass keine Metrik existiert, welche fast sichere Konvergenz induziert. Das heißt ist $\mathfrak{R}$ der Raum aller Zufallsvariablen, so existiert keine Metrik d auf $\mathfrak{R}$, sodass eine Folge von Zufallsvariablen genau dann fast sicher konvergiert wenn Sie bezüglich d konvergiert.

Hinweis Benutzen Sie zum Beweis der Aussage ohne Beweis nachfolgenden Satz: Ist (T, d) ein metrischer Raum, so konvergiert eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ gegen ein $t \in T$ genau dann wenn jede Teilfolge $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen t konvergente Teilfolge besitzt.
Bemerkung Das gleiche Resultat lässt sich zeigen, wenn man anstatt einem metrischen Raum einen lediglich topologischen Raum betrachtet.

6.(2+4+2 Punkte) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p$ und $X \in L^p$ für ein $p \geq 1$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

i) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} X_n \overset{f.s.}{=} X$ so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X$.

ii) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ im L^p-Sinne, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|^q = \mathbb{E}|X|^q$ für alle $q \in [1, p]$.

iii) Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ im L^p-Sinne, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X$.