Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Alexander Nerlich WS 2014/2015

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 11

Abgabe am 15.01.2015 vor Beginn der Übung

Sei (Ω, Σ, P) stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.

1.(6 Punkte) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ eine Folge von Zufallsvariablen. Ferner nehmen wir an, dass ein $X \in L^1$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} X_n \overset{L^1}{=} X$, existiert. Zeigen Sie, dass X entweder normalverteilt oder konstant ist, falls jedes X_n normalverteilt ist.

2. (5 Punkte) Sei $X_n \sim Exp(\lambda_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, wobei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen ist, welche so beschaffen sei, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, mit $\lambda_n > \varepsilon$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Ferner nehmen wir an, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsavariablen ist. Sei nun $Y_n := \min(X_1, ..., X_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie sowohl den fast sicheren, als auch den L^p Grenzwert der Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $p \geq 1$.
Hinweis Ist $Z \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ so gilt $\mathbb{E}Z^k = \frac{k!}{\lambda^k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. (Die Gültigkeit dieser Aussage dürfen Sie ohne Beweis annehmen.)

3. (4+4 Punkte) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Zufallsvariablen und sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

i) $X_n \overset{\text{P}}{\to} X$, für $n \to \infty$.

ii) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\big(\min(|X - X_n|, 1)\big) = 0$

4. (3+2 Punkte) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2$ und sei $X \in L^2$. Zeigen Sie die Äquivalenz der nachfolgenden Aussagen.

i) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ im L^2-Sinne.

ii) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(X^2)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n Y) = \mathbb{E}(XY)$ für alle $Y \in L^2$

5. (3+6 Punkte) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen. Ferner sei $Y_n := \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei die Verteilungsfunktion von X_n durch $F_n(x) := (1 - \frac{1}{x+n})\mathbb{1}\{x > 0\}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Zeigen Sie, dass zwar

$$\lim_{n\to\infty} X_n \overset{\text{P}}{=} 0 \tag{1}$$

aber nicht

$$\lim_{n\to\infty} Y_n \overset{\text{P}}{=} 0 \tag{2}$$

gilt. **Hinweis** Für (2) kann es nützlich sein $\max(X_1, ..., X_n)$ zu betrachten.