Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Alexander Nerlich WS 2014/2015

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
Übungsblatt 12

Abgabe am 22.01.2015 vor Beginn der Übung

Sei (Ω, Σ, P) stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.

1.(6 Punkte) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2$, sodass ein $c > 0$ existiert, sodass $Var(X_n) \leq c\log(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ferner gelte

$$\operatorname{Cov}(X_n, X_m) = 0 \ \forall m, n \in \mathbb{N}: \ |m-n| \geq 2 \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{n} X_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \ n \to \infty \tag{2}$$

2.(6 Punkte) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unkorrelierter Zufallsvariablen mit $X_1 = 0$ f.s. und

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n\log(n)} \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log(n)} \tag{3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_k \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \ n \to \infty \tag{4}$$

Hinweise Nutzen Sie hierbei ohne Beweis, dass

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^{n} \frac{k}{\log(k)} \leq \frac{1}{n^2}\Big(\frac{2}{\log(2)} + \int\limits_{3}^{n+1} \frac{y}{\log(y)}dy\Big) \tag{5}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt.

3.(5 Punkte) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2$ eine Folge unkorrelierter Zufallsvariablen. Ferner existiere ein $\alpha < 1$ und ein $c \geq 0$, sodass

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Var}(X_i) \leq ck^{\alpha} \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{6}$$

gilt. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_k \xrightarrow{f.s.} 0, \ n \to \infty \tag{7}$$

4.(7 Punkte) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ eine Folge von Zufallsvariablen. Ferner nehmen wir an, dass ein $p > 1$ und ein $X \in L^p$ exisitiert, mit $\lim\limits_{n\to\infty} X_n \overset{P}{=} X$. Zeigen Sie, dass wenn zusätzlich

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \int\limits_A |X_n(\omega)|dP(\omega) < \varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } \forall A \in \Sigma \text{ mit } P(A) < \delta \tag{8}$$

gilt, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \tag{9}$$

im L^1-Sinne.