Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Alexander Nerlich WS 2014/2015

# Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
## Übungsblatt 13

Abgabe am 29.01.2015 vor Beginn der Übung

Sei $(\Omega, \Sigma, P)$ stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.

**1.**(1+3+4+3 Punkte) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen. Ferner gelte $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Sei $S_n := X_1 + ... + X_n$ und $M_n := \max\limits_{j\in\{1,...,n\}} S_j$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp(-\frac{y^2}{2})dy, \ x \geq 0 \tag{1}$$

gilt. Geben Sie hierbei wie folgt vor:

i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}X_1 = 0$ und $\operatorname{Var}(X_1) = 1$ gelten.

ii) Zeigen Sie, dass $P\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} > x\right) = 2P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > x) - P(S_n = m_n)$ für alle $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt, wobei $m_n := \min(i \in \mathbb{N} : i > x\sqrt{n})$.

iii) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n = m_n) = 0$ gilt.

iv) Zeigen Sie, dass (1) gilt.

**Hinweis** Nehmen Sie ohne Beweis an, dass $P(M_n \geq m, S_n > m) = P(M_n \geq m, S_n < m)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt.

**2.**(4 Punkte) Der Fehler der beim Runden einer Dezimalzahl auf die erste Nachkommastelle entsteht, sei auf dem Intervall $(-0.05, 0.05)$ gleichverteilt. Berechnen sie approximativ mittels des zentralen Grenzwertsatzes, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Absolutbetrag aus der Summe von 1000 Rundungsfehlern kleiner als 2 ist.

**3.**(6 Punkte) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen, mit $X_1 \sim U[0,1]$. Ferner sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := \sin(x)$ definiert. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k) - \int_0^1 g(x)dx \overset{f.s.}{\to} 0 \tag{2}$$

gilt.
Ziel dieser Aufgabe ist es nun eine gewisse Fehlerabschätzung für diese Simulationsmethode herzuleiten: Berechnen sie approximativ mittels des zentralen Grenzwertsatzes ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k) - \int_0^1 g(x)dx\right| < 0.1\right) \geq 2\Phi(2) - 1 \quad \forall n \geq n_0 \tag{3}$$

gilt. Hierbei bezeichne $\Phi$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
**Bemerkung** Es gilt $2\Phi(2) - 1 \approx 0,9545$.