

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 2

Abgabe am 30.10.2014 vor Beginn der Übung

Sei (Ω, Σ, P) stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.

1.(3+1Punkte) Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- i) Seien $A, B, C \in \Sigma$, so dass A unabhängig zu B , B unabhängig zu C und A unabhängig zu C ist, so gilt $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$
- ii) Ist $A \in \Sigma$ unabhängig zu sich selbst, so gilt entweder $P(A) = 0$ oder $P(A) = 1$.

2.(9+3Punkte) Sei die Abbildung $d : \Sigma \times \Sigma \rightarrow (\Sigma, d)$ durch

$$d(A, B) := P(A \Delta B) \quad \forall A, B \in \Sigma \quad (1)$$

definiert. Ferner wollen wir an dieser Stelle bemerken, dass wir die σ -Algebra Σ frei von nicht-trivialen Nullmengen nennen, falls

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset \quad (2)$$

für alle $A \in \Sigma$ gilt.

- i) Zeigen Sie, dass (Σ, d) ein metrischer Raum ist, falls Σ frei von nicht-trivialen Nullmengen ist.
- ii) Geben Sie ein Gegenbeispiel eines Wahrscheinlichkeitsraums (Ω, Σ, P) , sodass Σ nicht frei von nicht-trivialen Nullmengen ist und so dass (Σ, d) kein metrischer Raum ist.

3. (8 Punkte) Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$, sodass

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty \quad (3)$$

gilt. Ferner nehmen wir an, dass $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Ereignisse sei. Zeigen sie, dass für jedes $A \in \Sigma$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \cap A) < \infty \quad (4)$$

$P(A) = 0$ gilt.

Hinweis: Benutzen Sie zweimal das Lemma von Borel-Cantelli und zeigen Sie, dass für jedes $C \in \Sigma$ mit $P(C) = 1$ die Gleichung $P(B \cap C) = P(B)$ für alle $B \in \Sigma$ gilt.

4. (1+2+2 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten beim gewöhnlichen Lotto 6 aus 49. (Hierbei soll es keine Zusatzzahl geben. Es werden einfach nur genau 6 Zahlen zwischen 1 und 49 gezogen.)

- i) Sie haben 6 Richtige.
- ii) Sie haben genau 5 Richtige.
- iii) Alle Zahlen, die gezogen werden, sind gerade.

5. (2 Punkte) Berechnen sie die Anzahl der möglichen Passwörter unter der Annahme, dass das Passwort mit exakt 4 Ziffern zwischen 0 und 9 beginnt (hierbei darf eine Zahl mehrfach vorkommen) und mit exakt einem oder mit exakt zwei kleinen lateinischen Buchstaben (keine Umlaute, kein scharfes s), welche nicht identisch sein dürfen, weitergeht.