Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Alexander Nerlich

WS 2014/2015
06.11.2014

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
Übungsblatt 4

Abgabe am 13.11.2014 vor Beginn der Übung

Sei (Ω, Σ, P) stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.

1. (3 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $X_k : \Omega \to \mathbb{R}$ für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ eine Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass auch $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, mit

$$Y(\omega) := \min(X_1(\omega), ..., X_n(\omega)),\ \omega \in \Omega \tag{1}$$

eine Zufallsvariable ist.
Bemerkung In allem Folgenden dürfen Sie ohne Beweis annehmen, dass für jedes Borel-messbare $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die durch $\omega \mapsto \varphi(X_1(\omega), ..., X_n(\omega))$, $\omega \in \Omega$, definierte Abbildung auch eine Zufallsvariable ist. Das heißt insbesondere beliebige Linearkombination, Potenzen, Produkte,... von Zufallsvariablen sind Zufallsvariablen. (Diese Aussage darf natürlich nicht benutzt werden um Aufgabe 1 zu beweisen.)

2. (8 Punkte) Sei $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ eine beliebige Verteilungsfunktion und sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

i) $P(X \in (a, b)) = F(b) - \lim\limits_{n\to\infty} F(a - \frac{1}{n})$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$.

ii) $P(X \in [a, b]) = F(b) - \lim\limits_{n\to\infty} F(a - \frac{1}{n})$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a \leq b$.

Bemerkung. Zeigen Sie zunächst, dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} F(a - \frac{1}{n})$ existiert.

3. (3+3+3+3+3 Punkte) Nutzen Sie Satz 3.2.2 um zu zeigen, dass ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) und eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert, sodass die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ von X durch

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , t \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{2} & , t \in [-1, 0) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t & , t \in [0, 2] \\ 1 & , t \in (2, \infty) \end{cases} \tag{2}$$

gegeben ist. Lösen Sie ferner alle nachfolgenden Teilaufgaben.

i) Berechnen Sie $P(X = a)$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ und $P(-1 < X \leq 2)$.

ii) Zeigen Sie, dass auch $Y(\omega) := \min(X(\omega), 1)$, für alle $\omega \in \Omega$, eine Zufallsvariable ist und bestimmen Sie dessen Verteilungsfunktion.

iii) Berechnen Sie $P(X + Y = 3)$.

iv) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktionen von X und Y.

4. (3 Punkte) Sei $(\Omega, \Sigma, P) := ([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), \lambda)$, wobei $\mathfrak{B}([0,1])$ die Borelsche σ-Algebra auf $[0,1]$ und λ das Lebesgue Maß auf $[0,1]$ bezeichne. Konstruieren Sie eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ von X durch

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , t \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2} & , t \in [0,1) \\ 1 & , t \in [1, \infty) \end{cases} \tag{3}$$

gegeben ist.
Bemerkung: Eine Zufallsvariable, dessen Verteilungsfunktion durch (3) gegeben ist, heißt Bernoulli-verteilte Zufallsvariable.

5. (11 Punkte) Seien $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen und seien $F_X, F_Y, F_Z : \mathbb{R} \to [0,1]$ die zugehörigen Verteilungsfunktion. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

i) Gilt $P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$, so gilt $F_X(t) = F_Y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

ii) Gilt $P(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) = Y(\omega)\}) = 0$, so existiert immer ein $t \in \mathbb{R}$, mit $F_X(t) \neq F_Y(t)$.

iii) Gilt $F_X(t) = F_Y(t) = F_Z(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so gilt auch $F_{XZ}(t) = F_{YZ}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. (Hierbei bezeichne F_{XZ}, bzw. F_{YZ}, die Verteilungsfunktion von XZ, bzw. YZ.)