Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Alexander Nerlich

WS 2014/2015
13.11.2014

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
Übungsblatt 5

Abgabe am 20.11.2014 vor Beginn der Übung

Sei (Ω, Σ, P) stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.

1. (3 Punkte) Sei $U : \Omega \to \mathbb{R}$ eine absolut stetige, auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Ferner bezeichne $[x]$, für ein $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die größte Zahl $n \in \mathbb{N}_0$, welche $n \leq x$ erfüllt. Zeigen Sie, dass

$$1 + \left[\frac{\ln(U)}{\ln(\frac{1}{2})}\right] \sim Geo(\frac{1}{2}) \tag{1}$$

gilt.

2. (2+2 Punkte) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, sodass $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$ und ein $\sigma^2 > 0$ gilt. Ferner sei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ die Dichtefunktion und $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ die Verteilungsfunktion von X Zeigen Sie, dass

i) f tatsächlich eine Dichte ist, das heißt es gilt $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. (Streng genommen muss man, damit f eine Dichte ist, noch zeigen, dass f messbar und fast überall größer Null ist. Diese beiden Fakten brauchen Sie nicht zu zeigen.)

ii) , dass $F(-t) = 1 - F(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt, falls $\mu = 0$.

Hinweis Nehmen Sie für i) ohne Beweis an, dass $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$ gilt.

3. (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $\lambda_k > 0$ für alle $k \in \{1, ..., n\}$. Ferner sei $X_k \sim Exp(\lambda_k)$ für alle $k \in \{1, ..., n\}$ und $X_1, ..., X_n$ seien unabhängig, das heißt

$$P(X_1 \in B_1, ..., X_n \in B_1) = P(X_1 \in B_1) \cdot .. \cdot P(X_n \in B_1) \tag{2}$$

für alle $B_1, ..., B_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$\min(X_1, ..., X_n) \sim Exp(\lambda_1 + ... + \lambda_n) \tag{3}$$

gilt.

4. (5 Punkte) Nehmen Sie an, dass in einem Teich 1000 Kaulquappen schwimmen und zusätzlich, dass eine Kaulquappe mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.001 nach einem Jahr zu einem Frosch geworden ist. Ferner nehmen wir an, dass das Ereignis das eine (oder mehrere) Kaulquappen zu einem Frosch werden unabhängig davon ist, dass eine andere (oder mehrere andere) zu einem Frosch werden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nach einem Jahr zwei oder mehr Frösche im Teich sind. Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit einmal exakt und einmal approximativ mittels der Poisson Verteilung.

5. (6 Punkte) Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die Verteilungsfunktion einer absolut stetigen Zufallsvariablen tatsächlich absolut stetig ist. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine absolut stetige Zufallsvariable, mit Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ und Dichte $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$. Sei f ferner stetig. Zeigen Sie, dass F absolut stetig ist, das heißt für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$ gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall \big([x_k, y_k]\big)_{k\in\mathbb{N}} \in I_{a,b} : \sum_{k=1}^{\infty} y_k - x_k < \delta\ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} |F(y_k) - F(x_k)| < \varepsilon, \tag{4}$$

wobei

$$I_{a,b} := \{([x_k, y_k])_{k\in\mathbb{N}} : x_k, y_k \in [a, b],\ x_k < y_k\ \forall k \in \mathbb{N},\ [x_k, y_k] \cap [x_j, y_j] = \emptyset\ \forall k \neq j \in \mathbb{N}\},$$

der Raum der disjunkten Intervallfolgen in $[a, b]$ ist.
Bemerkung Mit erheblichem Aufwand kann man zeigen, dass F auch absolut stetig ist, wenn f eine nicht notwendigerweise stetige Dichte ist.