Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Alexander Nerlich

WS 2014/2015
20.11.2014

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
Übungsblatt 6

Abgabe am 27.11.2014 vor Beginn der Übung

Sei (Ω, Σ, P) stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.

1. (7+2+3 Punkte) Sei $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein unabhängiger Zufallsvektor, mit $X, Y \sim N(0,1)$. Ferner sei $B_r(0) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq r\}$ der Einheitskreis mit Radius $r > 0$. Zeigen Sie, dass

$$P((X,Y) \in B_r(0)) = 1 - \exp(-\frac{r^2}{2}) \tag{1}$$

gilt. Nehmen Sie hierfür ohne Beweis an, dass $\int\limits_0^1 (y(1-y))^{-\frac{1}{2}} dy = \pi$ gilt.
Nehmen Sie nun an, dass ein Dartspieler einen Dartpfeil auf eine Kreisförmige Dartscheibe würft, welche einen Radius von 4 Längeneinheiten hat. Nehmen Sie nun an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler den Punkt (x,y) trifft, genau der Verteilung von (X,Y) folgt. Nehmen Sie ferner an, dass der Mittelpunkt der Dartscheibe genau im Koordinatenursprung $(0,0)$ liegt, das heißt im Mittel trifft der Spieler genau den Mittelpunkt der Scheibe.

i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Dartspieler die Scheibe trifft.

ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Dartspieler zwar die Scheibe aber nicht das Bullseye trifft. (Wir nehmen hierbei an, dass das Bullseye einen Radius von $\sqrt(2)$ Längeneinheiten hat.)

2. (4 Punkte) Sei $U : \Omega \to \mathbb{R}$ eine absolut stetige, auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Verteilung von $Z := -\frac{1}{\lambda}\ln(U)$, wobei $\lambda > 0$.

3. (7+5 Punkte) Sei $\lambda_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und sei $(X_0, ..., X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein Zufallsvektor mit unabhängigen Koordinaten, sodass $X_n \sim Poi(\lambda_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass

$$X_1 + ... + X_n \sim Poi(\lambda_1 + ... + \lambda_n) \tag{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie ferner, dass $P(\sum\limits_{k=1}^{X_0+1} X_k = 0) = \exp(-2\lambda + \lambda\exp(-\lambda))$ gilt, falls $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = ... := \lambda > 0$.
Hinweis. Eine Möglichkeit die Aussagen zu beweisen ist die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit auf $(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) = j\})_{j \in \mathbb{N}_0}$ für gewisse $n \in \mathbb{N}_0$ anzuwenden. Sie dürfen hierbei in dieser (und allen folgenden Aufgaben) ohne Beweis annehmen, dass die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit auch anwendbar ist wenn ein abzählbares und disjunktes System von Mengen (B_n) lediglich $P(\bigcup_n B_n) = 1$ und nicht zwingend $\bigcup_n B_n = \Omega$ erfüllt.

4. (5 Punkte) Sei $(X, Y, Z) : \Omega \to \mathbb{N}^3$ ein unabhängiger und diskret-verteilter Zufallsvektor und seien $F_X, F_Y, F_Z : \mathbb{R} \to [0, 1]$ die jeweiligen Verteilungsfunktionen von X, bzw. Y, bzw. Z. Ferner sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige Borel messbare Funktion. Zeigen Sie, dass

$$F_X(t) = F_Y(t) = F_Z(t)\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow F_{\varphi(X,Y)}(t) = F_{\varphi(X,Z)}(t)\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

gilt, wobei $F_{\varphi(X,Y)}$, bzw. $F_{\varphi(X,Z)}$, die Verteilungsfunktion von $\varphi(X, Y)$, bzw. $\varphi(X, Z)$ bezeichne.

Bemerkung Ein analoges Resultat lässt sich zeigen, wenn die betrachteten Zufallsvariablen absolut stetig sind. In Blatt 04 Aufgabe 5.iii) haben wir gesehen, dass das Resultat nicht korrekt bleibt, wenn man auf die Unabhängigkeit verzichtet.