Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Alexander Nerlich

WS 2014/2015
27.11.2014

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 7

Abgabe am 04.12.2014 vor Beginn der Übung

Sei (Ω, Σ, P) stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.

1. (3+3+3 Punkte) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Berechnen Sie alle folgenden Erwartungswerte.

i) $\mathbb{E}|X|$, falls $X \sim N(0, \sigma^2)$, wobei $\sigma^2 > 0$.

ii) $\mathbb{E}X$, falls $X \sim Geo(p)$, wobei $p \in (0, 1)$.

iii) $\mathbb{E}(2^X)$, falls $X \sim Exp(\lambda)$, wobei $\lambda > 0$.

gilt.
Bemerkung Die Existenz der Erwartungswerte ist in allen 3 Fällen trivial, denn offensichtlich existiert der Erwartungswert für jede Zufallsvariable die $X \geq 0$ f.s. erfüllt. (Hierbei ist mit Existenz gemeint, dass $\min(\int_\Omega X^+ dP, \int_\Omega X^- dP) < \infty$ gilt. Wir wollen allerdings bemerken, dass dies noch nicht heißt, dass $\mathbb{E}X \neq \infty$ gilt).
Allerdings ist die Frage der Existenz des Erwartungswertes für Zuvallsvariablen, die sowohl positive als auch negative Werte annehmen können, nicht mehr trivial. Deswegen werden wir in solchen Fällen immer erwähnen, ob die Existenz des Erwartungswertes zu zeigen (oder zu widerlegen) ist, oder ob man diese ohne Beweis annehmen darf.

2. (2+2 Punkte) Eine mit den Zahlen 0 und 1 beschriftete, faire Münze werde so lange geworfen, bis das erste Mal eine 1 erscheint. Ferner nehmen wir an, dass die einzelnen Münzwürfe voneinander unabhängig sind. Ein Spieler erhalte nun 2^n Geldeinheiten, falls die Münze $n \in \mathbb{N}$ mal geworfen wird. Ferner modelliere die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ den Gewinn, den der Spieler erzielt. Bearbeiten Sie alle nachfolgenden Aufgaben.

i) Zeigen Sie, dass $P(X = 2^n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(X) = \infty$ gilt.

3.(3+3 Punkte) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Zufallsvariable, sodass exakt ein $m \in \mathbb{R}$ existiert, welches

$$P(X \geq m) = P(X \leq m) = \frac{1}{2} \tag{1}$$

erfüllt.

i) Geben Sie eine mögliche Verteilung für X an, sodass $\mathbb{E}(X) \neq m$ gilt.

ii) Geben Sie eine mögliche Verteilung für X an, sodass $\mathbb{E}(X) = m$ gilt.

Bemerkung Vergessen Sie hierbei nicht, dass wir a priori festgelegt haben, dass X integrierbar sein soll und so beschaffen sein soll, dass m eindeutig ist. Die Floskel "geben Sie [...] an" meint natürlich, dass Sie die Verteilung nicht nur hinschreiben sollen, sondern auch tatsächlich zeigen sollen, dass sie die gegebene Eigenschaft erfüllt, bzw. nicht erfüllt.

4. (5+5 Punkte) Sei $\lambda_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und sei $(X_0, ..., X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein Zufallsvektor mit unabhängigen Koordinaten, sodass $X_n \sim Poi(\lambda_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{X_0+1} X_k \Big) = \lambda(\lambda + 1) \tag{2}$$

gilt, falls $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = ... := \lambda > 0$.
Geben Sie ferner eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, sodass die Zufallsvariable

$$\sum_{k=1}^{X_0+1} X_k \tag{3}$$

nicht integrierbar ist.

5. (4+2 Punkte) Seien $X \sim Exp(\lambda_1)$ und $Y \sim Exp(\lambda_2)$ zueinander unabhängige Zufallsvariablen, wobei $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Berechnen Sie

i) $\mathbb{E}(\max(X_1, X_2))$ und

ii) $\mathbb{E}(\min(X_1, X_2))$.