Prof. Dr. Evgeny Spodarev
Alexander Nerlich WS 2014/2015

Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Übungsblatt 8

Abgabe am 11.12.2014 vor Beginn der Übung

Sei (Ω, Σ, P) stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.
Hier und in allem Folgenden bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^p$, wobei $p \in [1, \infty)$, den durch

$$\mathcal{L}^p := \{X : \Omega \to \mathbb{R} | \ X \text{ ist eine Zufallsvariable, } \mathbb{E}(|X|^p) < \infty\} \tag{1}$$

definierten Raum.

1.(2+2+2+2Punkte) Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ beliebige Zufalsvariablen. Berechnen Sie alle nachfolgenden Größen.

i) $Var(X)$, falls $X \sim Ber(p)$ mit $p \in (0, 1)$.

ii) $\mathbb{E}(X^n)$, falls $X \sim U(a, b)$ mit $a < b$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

iii) Die Kovarianz zwischen $X + Y$ und $X - Y$, falls $X \sim U(0, 1)$ und $Y \sim U(-1, 0)$ zueinander unabhängige Zufallsvariablen sind.

iv) Den Korrelationskoeffizienten zwischen X^2 und Y, falls dessen gemeinsame Verteilung durch $P(X = k_1,\ Y = k_2) = \frac{1}{2}^{k_1+k_2}$ für alle $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ gegeben ist. (Hierbei ist letzteres so gemeint, dass $P(X = k_1,\ Y = k_2) = 0$ gilt, falls $(k_1, k_2) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt.)

Bemerkung Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass alle Zufallsvariablen, die in i) bis iv) betrachtet werden, für jedes $p \in [1, \infty)$ in $\mathcal{L}^p$ liegen.

2. (9 Punkte) Sei $p \in [1, \infty)$ und seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ beliebige Zufallsvariablen. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

i) Ist $X \in \mathcal{L}^p$, so gilt $X \in \mathcal{L}^q$, für alle $q \in [1, p]$.

ii) Ist $X \in \mathcal{L}^p$, so gilt $X \in \mathcal{L}^q$, für alle $q \in (p, \infty)$.

iii) Ist $XY \in \mathcal{L}^p$ für alle $p \in [1, \infty)$, so existieren $q_1, q_2 \in [1, \infty)$, mit $X \in \mathcal{L}^{q_1}$ und $Y \in \mathcal{L}^{q_2}$.

3. (5 Punkte) Sei $X \in \mathcal{L}^3$, sodass $\mathbb{E}X = 0$ gilt. Ferner wollen wir bemerken, dass wireine Zufallsvariable X als symmetrisch bezeichnen, falls X und $-X$ die gleiche Verteilung haben. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

i) Ist X symmetrisch, so gilt $Sch(X) = 0$.

ii) Gilt $Sch(X) = 0$, so ist X symmetrisch.

4. (3+3 Punkte) Sei X eine logarithmisch standardnormalverteilte Zufallsvariable, das heißt die Dichte $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ von X ist durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} \exp(-\frac{1}{2}(log(x))^2), & , x > 0 \\ 0, & , x \leq 0 \end{cases} \tag{2}$$

gegeben. Sei ferner $X_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ für jedes $\varepsilon \in [-1, 1]$ eine absolutstetige Zufallsvariable, wobei die Dichte von X_ε durch

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x)\big(1 + \varepsilon \sin(2\pi \log(x))\big), & , x > 0 \\ 0, & , x \leq 0 \end{cases} \tag{3}$$

für jedes $\varepsilon \in [-1, 1]$ gegeben ist. Zeigen sie alle nachfolgenden Teilaufgaben.

i) f_ε ist tatsächlich eine Dichte für jedes $\varepsilon \in [-1, 1]$. (Es genügt die Integrierbarkeitsbedingung zu zeigen, denn trivialerweise ist f_ε messbar und nicht negativ. Ferner dürfen Sie ohne Beweis annehmen, dass f eine Dichte ist.)

ii) $\mathbb{E}(X_{\varepsilon_1}^n) = \mathbb{E}(X_{\varepsilon_2}^n) < \infty$ für alle $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [-1, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$. (Nehmen Sie hierfür ohne Beweis an, dass $\mathbb{E}X_0^n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.)

Bemerkung Offensichtlich haben X_{ε_1} und X_{ε_1} für $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \in [-1, 1]$ unterschiedliche Verteilungen, womit wir überabzählbar unendlich viele Zufallsvariablen konstruiert haben, die zwar alle die gleichen Momente haben, aber nie die gleiche Verteilung.

5. (8 Punkte) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine absolut stetige Zufallsvariable und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion, sodass $g(X) \in \mathcal{L}^1$ und $\mathbb{E}g(X) = 0$ gilt. Ferner gelte $f \neq 0$ λ-f.ü., wobei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ die Dichte von X und λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass $g = 0$ λ-f.ü. gilt, falls die Zufallsvariablen $g(X)$ und $\mathbb{1}\{X \leq t\}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ unkorreliert sind.
Hinweis Benutzen Sie zur Lösung der Aufgabe ohne Beweis nachfolgenden Satz. Sei $\mathcal{E} \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ein System von Mengen und seien $\mu, \nu : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ zwei Maße. Ferner gelte

i) $\sigma(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$,

ii) gilt $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, so gilt auch $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{E}$ und

iii) es existieren $E_1, E_2, ... \in \mathcal{E}$ mit $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{R}$ und $\mu(E_n), \nu(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Gilt nun zusätzlich, dass

$$\mu(E) = \nu(E) \ \forall E \in \mathcal{E}, \tag{4}$$

so gilt auch

$$\mu(B) = \nu(B) \ \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}). \tag{5}$$

Nutzen Sie ferner ohne Beweis, dass die durch

$$B \mapsto \int_B h d\lambda \ \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \tag{6}$$

definierte Abbildung, für beliebiges messbares $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $h \geq 0$ λ-f.ü., ein Maß ist.